

微积分 I

肖源明

xym@nju.edu.cn

南京大学数学系

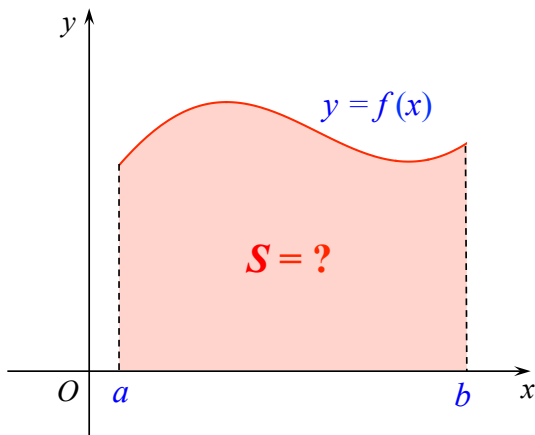
2023 年 9 月

问题：如何求给定曲线所围平面区域的面积？

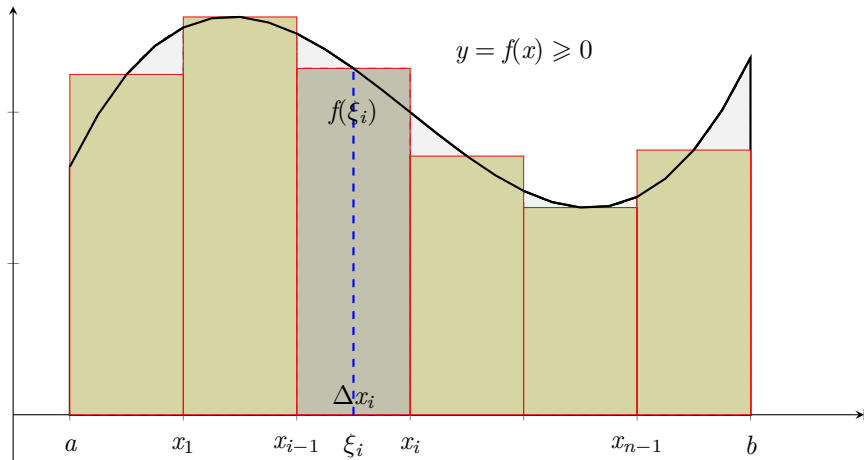


求“曲边梯形”的面积

给定曲线 $y = f(x)$ ，求由该曲线及 $y = 0$, $x = a$, $x = b$ 所围区域的面积。



“曲边梯形”的面积

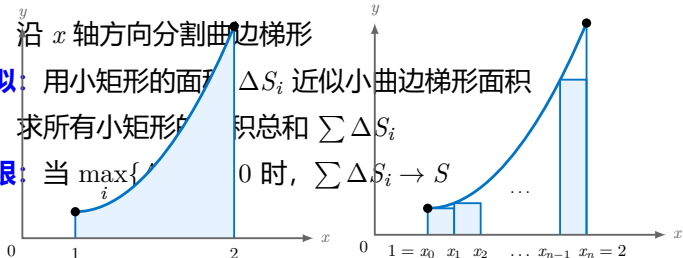


$$S = \sum_i \Delta S_i \approx \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i \Rightarrow S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i$$

例

求由曲线 $y = x^2$ 以及直线 $x = 1, x = 2$ 和 $y = 0$ 所围成的曲边梯形的面积。

- **分割**: 沿 x 轴方向分割曲边梯形
- **取近似**: 用小矩形的面积 ΔS_i 近似小曲边梯形面积
- **求和**: 求所有小矩形的面积总和 $\sum \Delta S_i$
- **取极限**: 当 $\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ 时, $\sum \Delta S_i \rightarrow S$





定义 3.2.1

P138

函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上 (Riemann) 可积:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

- 上式右端极限对 $[a, b]$ 的任意分法均存在且相同
- $\lambda \rightarrow 0$ 用于保证分割得足够“细”
- 给定分法, ξ_k 的取法应该是任意的

定理 3.2.1

P139

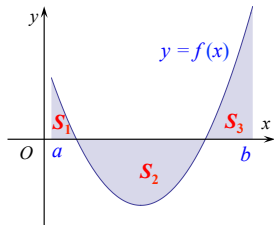
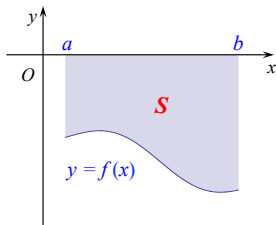
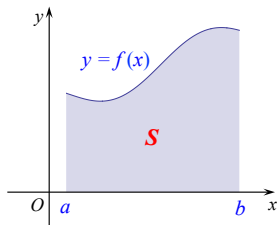
- ① $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则一定在 $[a, b]$ 上有界
 - ② $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则一定在 $[a, b]$ 上可积
 - ③ $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调有界, 则一定在 $[a, b]$ 上可积
- 分段连续 (只有有限个第一类间断点) 的函数是可积的

例

证明 Dirichlet 函数在任意区间 $[a, b]$ 上不可积。



- “带有符号的面积”



约定:

① $\int_a^a f(x)dx = 0$

② $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$



定理

P139-141

① 线性性:

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

② 区间可加性:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

③ 保号性:

- $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 且 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 非负且不恒为零, 则

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

- 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 且 $f(x) \leq g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

③ 保号性: (续)

- **绝对值不等式:** $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

- **积分估值:** $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 且 $m \leq f(x) \leq M$, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

$$1 \leq \sqrt{1+x^4} \leq 1+x^2, \quad \int_0^1 (4+x^2) dx = \frac{4}{3}.$$

例

证明不等式: $1 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx \leq \frac{4}{3}.$

例

已知 $f''(x) < 0$, $x \in [0, 1]$, 证明 $\int_0^1 f(x^2) dx \leq f\left(\frac{1}{3}\right).$

$$f(x) = f\left(\frac{1}{3}\right) + f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) + f''\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \quad f''(x) < 0$$

$$\therefore f(x) \leq f\left(\frac{1}{3}\right) + f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow f(x^2) \leq f\left(\frac{1}{3}\right) + f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^1 f(x^2) dx &\leq \int_0^1 f\left(\frac{1}{3}\right) dx + f'\left(\frac{1}{3}\right) \int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx \\ &= f\left(\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$



$$f(x) = [x], x \in [0, 2]$$

$$\int_0^2 [x] dx = \int_0^1 0 dx + \int_1^2 1 dx = 1$$

$$1 = \int_0^2 [x] dx \neq f(\xi) \cdot 2$$

$f(\xi) = \frac{1}{2}$ (不存在)

定理 3.2.3

P141-143

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则在 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ , 使得

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$$

思考: 定积分中值定理与微分中值定理有何联系?

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上取得最大值 M , 最小值 m .

$$m \leq f(x) \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M$$

$$= f(\xi)$$



① 定积分的定义：分割、取近似，求和、取极限

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

② 定积分的性质

- 线性性、区间可加性
- 保号性、保序性、定积分的估值
- 定积分中值定理

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$$

例：求下列极限

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right] = \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sin x_k \cdot \Delta x_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{2}{\pi}.$$

$$\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^3} \sqrt{n^2 - k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} \, dx$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} \int_x^{x+1} \frac{\sin t}{t + \cos t} \, dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} \sin \xi}{\xi + \cos \xi} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{-\frac{2}{3}} \sin \xi}{\frac{\xi}{x} + \frac{\cos \xi}{x}} = 0$$

$$\int_x^{x+1} \frac{\sin t}{t + \cos t} \, dt = \frac{\sin \xi}{\xi + \cos \xi} \quad \xi \in (x, x+1)$$

变限积分的性质



证直接:

定理 3.2.5 $|\Phi(x) - \Phi(x_0)| = \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right| = \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t)| dt \right| \leq M|x - x_0|$ P144

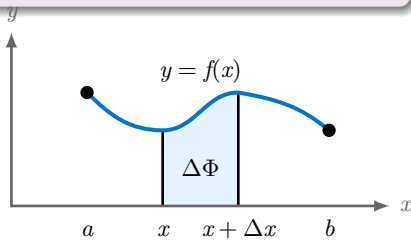
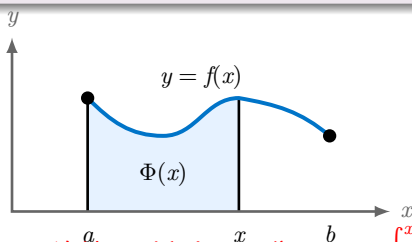
若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则**变上限积分**

证 $\Phi'(x) = f(x)$.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi) \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi \in (x, x + \Delta x) \\ \Phi(a) = 0 \end{array} \right.$$

在 $[a, b]$ 上连续. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\Phi(x)$ 可导, 且

$$\Phi'(x) = f(x).$$



- 若 $f(x)$ 连续, 则变上限积分 $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ 是 $f(x)$ 的一个原函数



$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_a^x f(t) dt & \int_a^b f(t) dt &= \Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a) \\ \Phi'(x) &= f(x) \\ F'(x) &= f(x) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_a^x f(t) dt \\ \Phi'(x) &= f(x) \\ F'(x) &= f(x) \end{aligned}} \right\} \Rightarrow \Phi(x) - F(x) = C.$$

定理 3.2.6 (Newton-Leibnitz 公式)

P145

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积, $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

例: 计算下列定积分

① $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

$$\int_0^1 x^2 dx = \left. \frac{1}{3} x^3 \right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

② $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{7}{12} \pi$

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_{-1}^{\sqrt{3}} = \frac{7}{12} \pi$$

③ $\int_{-1}^{-2} \frac{1}{x} dx$ 注意上下限顺序.

变限积分求导



推导: $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ 令 $S = \psi(x)$ 则有 $\Phi(\psi(x)) = \int_a^{\psi(x)} f(t) dt$ $[\int_a^{\psi(x)} f(t) dt]' = \Phi'(\psi(x)) = \Phi'(\psi(x)) \psi'(x) = f(\psi(x)) \psi'(x)$

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt = \int_a^{\psi(x)} f(t) dt - \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt.$$

$$\left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt \right]'_x = f[\psi(x)]\psi'(x) - f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

例：计算

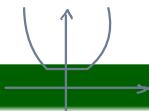
$$\textcircled{1} \frac{d}{dx} \int_0^{\sin x} f(t) dt = f(\sin x) \cdot \cos x.$$

$$\textcircled{2} \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} e^{-t} dt = 3x^2 e^{-x^3} - 2x e^{-x^2}.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{3x^3} = \frac{1}{3}$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \left(\int_0^x e^{t^2} dt \right) e^{x^2}}{e^{2x^2}} \stackrel{\infty}{=} \frac{2e^{x^2}}{2e^{2x^2}} = 1$$

例



$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ x^2, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \begin{cases} x & |x| \leq 1 \\ 1 + \int_1^x t^2 dt & x > 1 \\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3} & x < -1 \end{cases}$$

求函数 $f(x) = \max\{1, x^2\}$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的一个原函数使得 $F(0) = 1$.

例

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + C_1, & x < -1 \\ x + C_2, & -1 < x < 1 \\ \frac{1}{3}x^3 + C_3, & x > 1 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}, & x < -1 \\ x + 1, & -1 < x < 1 \\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}, & x > 1 \end{cases}$$

设 $f \in C[a, b]$, 且 $\int_a^b f(x) dx = 0$. 证明: $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $\int_a^\xi f(x) dx = f(\xi)$.

$$\Rightarrow F(\xi) = f(\xi) = F'(\xi) \\ [e^{-x} F(x)]' \Big|_{x=\xi} = 0$$

例

设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续可导, 且 $f(0) = 0$, 证明 $\left| \int_0^a f(x) dx \right| \leq \frac{Ma^2}{2}$.

其中 $M = \max_{0 \leq x \leq a} |f'(x)|$. $f(x) \leq g(x) = Mx \quad \int_0^a Mx dx = \frac{M}{2}a^2$.

$$|f(x)| = |f(x) - f(0)| \leq M|x|$$

$$\left| \int_0^a f(x) dx \right| \leq \int_0^a |f(x)| dx \leq \int_0^a Mx dx = \frac{M}{2}a^2$$



定义

P119

① $F(x)$ 是 $f(x)$ 的**原函数**: $F'(x) = f(x)$

② $f(x)$ 的**不定积分**: $\int f(x)dx = F(x) + C$

- $\int f(x)dx = \int dF(x)$ 与微分的联系
- $\left[\int f(x)dx \right]' = f(x)$ 互逆
- $\int [af(x) + bg(x)]dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx$ 线性性 (集合的关系)

基本不定积分公式



$$\textcircled{1} \int k dx = kx + C$$

$$\textcircled{2} \int e^x dx = e^x + C$$

$$\textcircled{3} \int x^a dx \ (a \neq -1) = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$$

$$\textcircled{4} \int a^x dx \ (a > 0) = \frac{1}{\ln a} a^x + C$$

$$\textcircled{5} \int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln x + C_1, & x > 0 \\ \ln(-x) + C_2, & x < 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{6} \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\text{e.g.} \int \frac{x^5}{1+x^2} dx = \int \frac{x^5-1+1}{1+x^2} dx = \int x^3-1 + \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{1}{5}x^5 - x + \arctan x + C.$$

$$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1-x^2-x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \arctan x + C$$

$$\int \frac{x}{x^2-1} dx = \int x \frac{1}{(x-1)(x+1)} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int (x-1) \frac{1}{x-1} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int (x-1)^{\frac{1}{2}} dx + \int$$

$$\textcircled{7} \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\textcircled{8} \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\textcircled{9} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$\textcircled{10} \int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$\textcircled{11} \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\textcircled{12} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$



$$\int \tan^2 x \, dx = \int \sec^2 x \, dx - \int dx = \tan x - x + C$$

$$\int \sin^2 \frac{x}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} (1 - \cos x) \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x + C$$

定理 (第一换元法)

P123

设 $f(u)$ 具有原函数, $u = \varphi(x)$ 可导, 则

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \left[\int f(u) du \right]_{u=\varphi(x)}$$

- 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = F[\varphi(x)] + C$$

例 1: 计算下列不定积分

$$\textcircled{1} \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \int \cos 2x \cdot 2 dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$\frac{1}{4} \int \cos 2x \cdot d(2x) \quad (\text{凑微分})$

$$\textcircled{2} \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = - \ln |\cos x| + C$$

$$\textcircled{3} \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^u d\frac{u}{2} = \frac{1}{2} e^u + C$$

$u dx = d\frac{u}{2}$

$$\textcircled{4} \int \frac{x^2}{(x+2)^3} dx = \int \frac{(x+2-2)^2}{(x+2)^3} dx = \int \frac{(x+2)^2 - 4(x+2) + 4}{(x+2)^3} d(x+2)$$

$= \int \frac{1}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2} + \frac{4}{(x+2)^3} d(x+2) = \ln|x+2| + \frac{4}{2(x+2)} - \frac{4}{(x+2)^2} + C$

$$\textcircled{5} \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1 + (\frac{x}{a})^2} d\frac{x}{a} = \frac{1}{a} \int \frac{1}{1 + (\frac{x}{a})^2} d\frac{x}{a} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\textcircled{6} \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad (a > 0) \quad \boxed{\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \ln|x + \sqrt{a^2 - x^2}| + C}$$

$$= \int \frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} d\frac{x}{a} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$\textcircled{7} \int \frac{1}{x(1+2\ln x)} dx = \int \frac{d \ln x}{1+2\ln x} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+2\ln x)}{1+2\ln x}$$

$= \frac{1}{2} \ln |1+2\ln x| + C$

$$\textcircled{8} \int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int e^{3\sqrt{x}} d\sqrt{x} = \frac{2}{3} e^{3\sqrt{x}} + C$$

$$\textcircled{9} \int \sin^3 x dx = - \int \sin^2 x \cos x dx = - \int (1 - \cos^2 x) d\cos x = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C$$

$$\textcircled{10} \int \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{1}{2} \int \sin^2 x \cos^2 x \cdot 2 \cos x dx = \frac{1}{2} \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) d\sin x$$

$= \frac{1}{2} \int (-\frac{1}{5} \sin^5 x + \frac{1}{3} \sin^3 x) d\sin x + C$

$$\textcircled{11} \int \sec^6 x dx = \int \sec^4 x \cdot d\sec x = \int (\tan^2 x + 1)^2 d\sec x = \frac{1}{5} \tan^5 x - \frac{2}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan x + C$$

$$\textcircled{12} \int \sec x dx = \int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{d\sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 - \sin^2 x} + \frac{1}{1 + \sin^2 x} d\sin x$$

$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C$

$= \ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| + C$

定理 (第二换元法) 变量代换

P123

设 $x = \varphi(t)$ 可导且可逆, $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 具有原函数, 则

$$\int f(x)dx = \left[\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \right]_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

例 2: 计算下列不定积分

① $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$

$t = \arcsin \frac{x}{a}$
 $(x = a \sin t, t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$

$\int a^2 \cos^2 t dt = \int a^2 (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} (t + \frac{1}{2} \sin 2t) + C$

$= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} (\frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}) + C$



② $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

$t = \arctan \frac{x}{a}$
 $(x = a \tan t, t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$

$\int \frac{a \sec^2 t}{a \sec t} dt = \int \sec t dt = \ln |\sec t + \tan t| + C$

$= \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} + \frac{x}{a} \right| + C = \ln (x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C$



③ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

$= \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$

④ $\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx$

⑤ $\int \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} dx$

⑥ $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1 + x^2}}$

$t = \sqrt{x}$

$= \int \frac{1}{1+t} d t^2 = 2 \int \frac{t}{1+t} dt = 2 \int (1 - \frac{1}{1+t}) dt$

$= 2(t - \ln(1+t)) + C = 2(\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})) + C$

$t = \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}}$ $e^x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$ $x = \ln \frac{1+t^2}{1-t^2}$

$= \int t d \ln \frac{1+t^2}{1-t^2} = \int t \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)' dt$

$= \int \frac{2t^3}{1-t^4} dt = 2 \int \frac{1}{1-t^4} dt = \int \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} - \frac{2}{1+t^2} dt$

$= \ln \frac{1+t}{1-t} - 2 \arctan t + C$ 换代 x .

⑥ $= \int \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1} dx = \int \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx - \int \frac{1}{e^{2x} - 1} dx$

$= \int \frac{d e^x}{e^{2x} - 1} - \int \frac{e^{-x}}{1 - e^{-2x}} dx$

$x = \arcsin t$

$= \int \frac{\cos^3 t}{\sin t \cos t} dt = \int \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt = \int \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt$

$u = \sin t$

$= \int \frac{(1-u^2)}{u^2} du$

$= \ln |e^x + e^{-x}| - \arctan e^{-x} + C$

$= \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}} = \int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} d(\frac{1}{e^x}) = - \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

$= - \frac{1}{2} \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t^2} dt = - \frac{1}{2} \arctan t + C$

$= - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (1+t^2)^{-\frac{1}{2}} - 2(1+t^2)^{-\frac{3}{2}} \right) + C/21$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \int \frac{1}{\tan^2 x + 2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\tan^2 x + 2} d\tan x = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x dx}{\sin x + \cos x} &= \frac{1}{2} \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} - \frac{-\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\int 1 dx - \int \frac{1}{\sin x + \cos x} d(\sin x + \cos x) \right] = \frac{1}{2} (x - \ln |\sin x + \cos x|) + C \end{aligned}$$

对于 $\int \frac{a'\sin x + b'\cos x}{a\sin x + b\cos x} dx$ 形式的积分, 其分子总可以化为:

$$a'\sin x + b'\cos x = a_1(a\sin x + b\cos x) + b_1(a\sin x + b\cos x)'$$

$$\begin{aligned} \text{即} \int \frac{a'\sin x + b'\cos x}{a\sin x + b\cos x} dx &= \int \frac{a_1(a\sin x + b\cos x) + b_1(a\sin x + b\cos x)'}{a\sin x + b\cos x} dx = \int a_1 dx + \int \frac{b_1}{a\sin x + b\cos x} d(a\sin x + b\cos x) \\ &= a_1 x + b_1 \ln |a\sin x + b\cos x| + C \end{aligned}$$

$$\int uv' dx = uv - \int u' v dx$$

例 3: 计算下列不定积分

$$\textcircled{1} \int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

$$\textcircled{2} \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + C$$

$$\textcircled{3} \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$$

$$\textcircled{4} \int \ln x dx = x \ln x - \int 1 dx = (x-1) \ln x + C$$

$$\textcircled{5} \int x \arctan x dx = \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 \arctan x - x + \arctan x) + C$$

$$\textcircled{6} \int e^x \cos x dx$$

$$\begin{aligned} \cos x &= (\sin x)' & \sin x &= (\cos x)' \\ \int e^x \cos x dx &= e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - (-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx) \\ 2 \int e^x \cos x dx &= e^x \sin x + e^x \cos x \\ \int e^x \cos x dx &= \frac{1}{2} (\sin x + \cos x) e^x + C \\ \text{即: } \int e^{ax} (b \sin x + c \cos x) dx &= e^{ax} (b' \sin x + c' \cos x) + C \end{aligned}$$

$$\text{求 } I_k = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^k} \quad (a \neq 0, k=1, 2, \dots).$$

$$I_k = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^k} = \frac{x}{(a^2+x^2)^k} - \int x d \frac{1}{(a^2+x^2)^k} = \frac{x}{(a^2+x^2)^k} + 2k \int \frac{1}{(a^2+x^2)^k} dx - 2ka^2 \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{k+1}}$$

$$= \frac{x}{(a^2+x^2)^k} + 2k I_k - 2ka^2 I_{k+1}$$

$$\therefore I_{k+1} = \frac{1}{2ka^2} \left[\frac{x}{(a^2+x^2)^k} + (2k-1) I_k \right], \quad k=1, 2, \dots$$



① 换元法

- $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \left[\int f(u)du \right]_{u=\varphi(x)}$
- $\int f(x)dx = \left[\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \right]_{t=\varphi^{-1}(x)}$

② 分部积分法

- $\int uv' dx = uv - \int u' v dx$



第一换元法常用技巧

① **分项积分**: 积化和差, 有理分式分解, ...

② **降低幂次**: 倍角公式, 凑幂公式, ...

例如: $\int \sin^m x \cos^n x dx,$

- m, n 中有奇数, 取奇次幂的底数 (如 n 是奇数, 则取 $\cos x$) 与 dx 凑微分。
- m, n 均为偶数, 则利用倍角公式降幂, 直至将三角函数降为一次幂。

③ **统一函数**: 三角公式, $1 = \sin^2 x + \cos^2 x,$...

例如: $\int \frac{1}{a \sin^2 x + b \cos^2 x} dx, \int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx, \int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$

④ **巧妙配元**: 加一项减一项, ...

第二换元法常用变换

- ① 当被积函数含有二次根式时，一般可通过三角代换将根号化去，

$$\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx \xrightarrow{x=a \sin \theta} \int f(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx \xrightarrow{x=a \tan \theta}$$

$$\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \text{ 先配方, 再换元}$$

- ② 当被积函数含有一次根式时，如

- $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx$, 作变换 $t = \sqrt[n]{ax+b}$;
- $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b}) dx$, 作变换 $t = \sqrt[p]{ax+b}$, 其中 p 是 m, n 的最小公倍数
- $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$, 作变换 $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

- ③ 倒代换: $x = \frac{1}{t}$

$$\int \frac{x + \tan x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{u dv}{v^2} dx = -\frac{1}{v} \int du = -\frac{1}{\cos^2 x} \left[\frac{x}{\cos^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} \right] = -\frac{1}{\cos^2 x} \left[\frac{x}{\cos^2 x} - \int (\sec^2 x) dx \right]$$

- ① 若被积函数 = 幂函数 $\times$ 正(余)弦或指数函数, 则幂函数在 d 之前, 正(余)弦或指数函数置于 d 之后。
- ② 若被积函数 = 幂函数 $\times$ 对数函数或反三角函数, 则对数函数或反三角函数在 d 之前, 幂函数置于 d 之后。
- ③ 若被积函数 = 指数函数 $\times$ 正(余)弦函数, 任选一种函数凑微分。如需多次分部积分, 要注意每次凑微分时函数的选择要一致。



$$\textcircled{1} \int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$\textcircled{2} \int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$\textcircled{3} \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$$

$$\textcircled{4} \int \frac{1}{x^2 + a^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$$

$$\textcircled{5} \int \frac{1}{x^2 - a^2} \, dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C \quad (a \neq 0)$$

$$\textcircled{6} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \, dx = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C \quad (a \neq 0)$$

$$\textcircled{7} \int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$$



例：计算下列不定积分

$$\textcircled{1} \int \frac{x^2 + \sin^2 x}{x^2 + 1} \sec^2 x dx = \int \frac{x^2 + 1 - \cos^2 x}{x^2 + 1} \sec^2 x dx = \int \sec^2 x - \frac{1}{x^2 + 1} dx = \tan x - \arctan x + C$$

$t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

$$\textcircled{2} \int \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{1 - x^2}} dx = \int \frac{1}{(\sin^2 t + 1) \cos t} d\sin t = \int \frac{1}{1 + \sin^2 t} dt = \int \frac{1}{2\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\tan^2 t + 1} d\tan t = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\arcsin x}{\sqrt{2}} + C$$

$$\textcircled{3} \int \frac{3 \cos x - 4 \sin x}{\cos x + 2 \sin x} dx$$

$$\textcircled{4} \int \frac{3x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} dx = \int \frac{3(x-1) + 2}{\sqrt{(x-1)^2 - 4}} dx = \int \frac{3(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2 - 4}} dx + \int \frac{2}{\sqrt{(x-1)^2 - 4}} dx$$



定义

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

其中 $P(x)$, $Q(x)$ 均为多项式函数, 若 $P(x)$ 的次数小于 $Q(x)$ 的次数, 称该函数为**真分式**, 否则为**假分式**

- 利用**多项式除法**, 任意假分式都可以表示成一个多项式与一个真分式的和, 例如:

$$\frac{2x^4 + x^2 + 3}{x^2 + 1} = 2x^2 - 1 + \frac{4}{x^2 + 1}$$



例：计算下列不定积分

$$\textcircled{1} \int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n) dx$$

$$\textcircled{2} \int \frac{dx}{(x-a)^n}$$

$$\textcircled{3} \int \frac{dx}{x^2 + px + q}$$

$$\textcircled{4} \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n}$$

- 设 $Q(x)$ 可分解为两个没有公因式的多项式 $Q_1(x), Q_2(x)$ 的乘积, 则真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 必可分解为两个真分式 $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ 的和
- 任意多项式都可分解为形如 $(x^2 + px + q)^l, (x - a)^k$ 的多项式的乘积

例: 计算下列不定积分

$$\textcircled{1} \int \frac{x^2 + 5x + 6}{(x-1)(x^2 + 2x + 3)} dx$$

$$\textcircled{2} \int \frac{2x + 2}{(x-1)(x^2 + 1)^2} dx$$

$$\textcircled{3} \int \frac{dx}{x(x^{10} + 1)} \quad t = \frac{1}{x} \quad = \int \frac{t^9}{1+t^{10}} dt = \frac{1}{10} \int \frac{d t^{10}}{t^{10} + 1} = \frac{1}{10} \ln |t^{10} + 1| + C$$

$$\textcircled{4} \int \frac{dx}{x^4 + 1} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2 - x^2} = \int \frac{dx}{(x^2+1-x)(x^2+1+x)} = \dots$$

可拆成 $\frac{1}{x^2+1} - \frac{x}{x^4+1}$

$$\textcircled{1} \int \frac{x^2 + 5x + 6}{(x-1)(x^2 + 2x + 3)} dx = \int \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3} dx = \int \frac{x}{x-1} - \frac{x}{x^2+2x+3} dx = 2 \ln|x-1| - \int \frac{\frac{1}{2}(x^2+2x+3)+1}{x^2+2x+3} dx$$

$$= 2 \ln|x-1| - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+2x+3} dx + \int \frac{1}{2(x^2+2x+3)} dx$$

$$\textcircled{2} \int \frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2} dx = \int \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx = \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| - \frac{1}{2x^2+1} + C$$



可化为有理函数的积分

三角有理函数

$$\int \frac{1 + \sin x}{\sin x (1 + \cos x)} dx = \int \frac{1}{1 + \cos x} dx + \int \frac{1}{\sin x (1 + \cos x)} dx = \int \frac{d(\cos x)}{\sin^2 x (1 + \cos x)} = \int \frac{dt}{(1-t^2)(1+t)} = \dots$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int \frac{dx}{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2} = \int \frac{dx}{2 - \frac{1}{2} \sin^2 2x} = \int \frac{dx}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 2x} = \int \frac{1}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 2x} \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} dx = \dots$$

例：计算下列不定积分

① $\int \frac{1 + \sin x}{\sin x (1 + \cos x)} dx$

② $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$

③ $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$

④ $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+2}}$

⑤ $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

⑥ $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx = \int \frac{t \cdot \frac{1}{2} t^{-1/2}}{t^2 + 1} dt = \int \frac{t^{1/2}}{t^2 + 1} dt$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+2}} = \dots$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \dots$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}} = \int \frac{d(\ln e^x)}{\sqrt{e^x + 1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{e^t + 1}} = \int \frac{1}{t+1} dt = \ln \frac{t+1}{t} + C = \ln \frac{\ln(e^x + 1) + 1}{\ln e^x + 1} + C$$



计算下列不定积分

① $\int \frac{\ln x}{(1-x)^2} dx$

② $\int x^2 (\ln x)^2 dx$

③ $\int (\cos x + \sqrt{x} \sec x)^2 dx$

④ $\int \cos x \cdot \sqrt{e^{\sin x} - 1} dx$

⑤ $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$

⑥ $\int \tan^6 x \sec^4 x dx$

⑦ $\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$

⑧ $\int \frac{1}{1+3 \sin^2 x} dx$

⑨ $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$

⑩ $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx$

⑪ $\int x \sqrt{1+x^2} dx$

⑫ $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$

答案:

① $\frac{\ln x}{1-x} + \ln |1-x| - \ln x + C$

② $\frac{1}{3} x^3 \ln^2 x - \frac{2}{9} x^3 \ln x + \frac{2}{27} x^3 + C$

③ $\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + x \tan x + \ln |\cos x| + C$

④ $2\sqrt{e^{\sin x} - 1} - 2 \arctan \sqrt{e^{\sin x} - 1} + C$

⑤ $\frac{1}{2} x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} + x - \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C$

⑥ $\frac{1}{7} \tan^7 x + \frac{1}{9} \tan^9 x + C$

⑦ $x - \tan x + \sec x + C$

⑧ $\frac{1}{2} \arctan(2 \tan x) + C$

⑨ $\frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln(1-x^2) + C$

⑩ $\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}$

⑪ $\frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

⑫ $-\frac{x}{2 \sin^2 x} - \frac{1}{2} \cot x + C$

微分与积分的互逆关系



微分	积分
微积分基本定理	
$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$	$\int_a^x \frac{d}{dt} f(t) dt = f(x) - f(a)$
运算法则	
$[c_1 u(x) + c_2 v(x)]' = c_1 u'(x) + c_2 v'(x)$	$\int [c_1 f(x) + c_2 g(x)] dx = c_1 \int f(x) dx + c_2 \int g(x) dx$
$(uv)' = u'v + uv'$	$\int u' v dx = uv - \int uv' dx$
$\frac{df(u(x))}{dx} = \frac{df}{du} \frac{du}{dx}$	$\int \frac{df}{du} \frac{du}{dx} dx = f(u(x)) + c$
中值定理	
$\mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a) = \mathcal{F}'(\xi)(b - a)$	$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$
常用公式	
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$(\sin x)' = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + c$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$
$(e^x)' = e^x$	$\int e^x dx = e^x + c$



① 定积分的定义：分割、取近似，做和、求极限

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

② 定积分的性质

- 线性性、区间可加性
- 保号性、保序性、定积分的估值
- 定积分中值定理

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$$



定理 3.2.5

P144

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，则变上限积分 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a, b]$ 上连续。若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $\Phi(x)$ 可导，且 $\Phi'(x) = f(x)$ 。

定理 3.2.6 (Newton-Leibnitz 公式)

P145

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积， $\mathcal{F}(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a).$$



定理 3.2.7 (换元法)

P148

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 函数 $x = \varphi(t)$ 满足:

- ① $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$;
- ② $\varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续可导, 且 $\varphi(t) \in [a, b]$, 则 中间变量无需一一对应

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$

定理 3.2.8 (分部积分法)

P150

$$\int_a^b u(x) dv(x) = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x) du(x)$$

例：计算下列定积分

$$\textcircled{1} \int_9^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_9^4 = -2$$

$$\textcircled{2} \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx \stackrel{\text{Substitution}}{=} \int_{\cos^2 \theta}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} \right)^{\frac{3}{2}} d\theta = \left[\frac{3}{8} \theta + \frac{3}{8} \sin 4\theta + \frac{3}{8} \cos 4\theta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8} \pi$$

$$\textcircled{3} \int_0^\pi \sqrt{1 - \sin x} \, dx = \int_0^\pi \left| \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right| dx = x \Big|_0^\pi \left| \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right| dx \dots \frac{\text{分拆}}$$

$$\textcircled{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \, dx \stackrel{\substack{t = \arcsin x \\ dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{6}} t \sin t \, dt = t \sin t \bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin t \, dt \, dt$$

$$\textcircled{5} \int_0^1 x \ln(1+x^2) dx \stackrel{u=\frac{1}{2} \ln(1+x^2)}{=} \int_0^1 \ln(1+x^2) d(1+x^2) = \dots$$

$$\textcircled{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \cdot d(\cos x) = - \left(\sin^{n-1} x \cdot \cos x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^{n-2} x \, dx$$

Wallis 积分公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2} & n \text{ 为偶数,} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

$$n!! = n(n-2)(n-4) \dots$$

$$\text{Wallis 乘积 } \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \left(1 - \frac{1}{6^2}\right) \cdots = \frac{2}{\pi}$$



证明.

在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上, 由 $\sin^{2n+1}x \leq \sin^{2n}x \leq \sin^{2n-1}x$ ($n \in \mathbb{N}$), 取积分可得

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

于是

$$\frac{2n+1}{2n+1} \leq \frac{\pi}{2} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 (2n+1) \leq \frac{2n+1}{2n}$$

两边取极限 ($n \rightarrow \infty$), 由夹逼定理得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 (2n+1) = 1$$

$$\text{即 } \frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n}{2n-1} \right). \quad \square$$

例 3.2.15 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 证明



$$F(x) = \int_0^x f(t)(x-t) dt = \int_0^x \left(\int_0^t f(x) dx \right) dt. = G(x)$$

$$F(0) = 0$$

$$G(0) = 0$$

$$\text{即证 } F'(x) = G'(x)$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)(x-t) dt = \int_0^x x f(t) - t f(t) dt = x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt$$

$$F'(x) = \int_0^x f(t) dt + x f(x) - x f(x) = \int_0^x f(t) dt = G'(x)$$

故 $F(x) = G(x)$ 得证

【例】求 $\int_0^x t f(x^2 - t^2) dx$ 的导数

$$\int_0^x t f(x^2 - t^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^x f(x^2 - t^2) dt^2 \stackrel{u=x^2-t^2}{=} \frac{1}{2} \int_{x^2}^0 f(u) d(-u) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u) du$$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{1}{2} f(x^2) \cdot 2x = x f(x^2)$$



定积分的特殊计算方法

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx$$

① 对称区间上的定积分:

- $\int_{-a}^a f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a [f(x) + f(-x)] dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx$
- 奇函数: $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$
- 偶函数: $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{1+e^x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+e^x} dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{x}{1+e^x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+e^x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-x}{1+e^{-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{3!!}{4!!} \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}$$

* 分子可换为奇偶函数

例: 计算

① $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$

② $\int_0^4 x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) dx$

③ $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^6 x}{1+e^{-x}} dx$

④ $\int_{-1}^1 \frac{x + \cos x}{1 + \sin^2 x} dx$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{t=x-2} \int_{-2}^2 (t-2)(t-1)t(t+1)(t+2) dt = \int_{-2}^2 (t^5 - t^3) dt = \dots \end{aligned}$$

例 3.2.13 求 $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

解 要求出被积函数的原函数是一件十分棘手的事, 我们可采用适当的变量代换, 以简化计算. 作代换 $x = \pi - t$, 则

$$I = \int_{\pi}^0 \frac{(\pi - t) \sin(\pi - t)}{1 + \cos^2(\pi - t)} (-dt) = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt - I,$$

于是

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \frac{\pi}{2} [-\arctan(\cos t)]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}. \quad \square$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \stackrel{t = \pi - x}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \cos t}{1 + \sin^2 t} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} \cos t}{1 + \sin^2 t} dt = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \sin t}{1 + \sin^2 t} = \frac{\pi}{2} \arctan(\sin t) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$$

② 周期函数的定积分

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

③ 正弦、余弦的转换:

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$$

$$\text{令 } t = \frac{\pi}{2} - x \quad dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\sin(\frac{\pi}{2}-t)) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t) dx.$$

例：计算

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$



① Newton-Leibnitz 公式

$$\int_a^b f(x)dx = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a)$$

② 变限积分

$$\left[\int_a^x f(t)dt \right]'_x = f(x)$$

③ 定积分的计算

- 换元法、分部积分法
- 定积分的一些特殊性质



例

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶连续可微, $f(a) = f(b) = 0$,

(1). 证明:
$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \int_a^b (x-a)(x-b)f''(x) dx.$$

(2). 证明:
$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

例

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx.$$

证明存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $\int_0^\xi f(x) dx = 0$.

$$(1) F_2 = \frac{1}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) df(x) = \frac{1}{2} (x-a)(x-b) f(x) \Big|_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b f(x)(2x-a-b) dx = -\frac{1}{2} \int_a^b (2x-a-b) df(x) = -\frac{1}{2} [(2x-a-b) f(x) \Big|_b^a - 2 \int_a^b f(x) dx] = 0$$

$$(2) \left| \int_a^b f(x) dx \right| = \frac{1}{2} \left| \int_a^b (x-a)(x-b) f'(x) dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_a^b |(x-a)(x-b)| |f'(x)| dx = \frac{1}{2} |f'(\xi)| \int_a^b |(x-a)(x-b)| dx = \frac{(b-a)^3}{12} |f'(\xi)| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$$

例1 即证 $F(\xi) = 0$. 其中 $F(x) = \int_0^x f(x) dx$.

$$\text{由 } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x f(x) dx.$$

$$F(1) = \int_0^1 x f'(x) dx = x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = F(1) - \int_0^1 f(x) dx$$

$$\therefore \int_0^1 f(x) dx = 0 \quad \text{即存在 } \xi \text{ 使 } F(\xi) = \int_0^\xi f(x) dx = 0 \text{ (积分中值定理)}$$

2° (微分中值定理)

$$H(x) = \int_0^x H'(t) dt, \quad H'(x) = \int_0^x f(t) dt \quad \text{即证 } H'(\xi) = 0$$

$$H(x) = t H'(t) \Big|_0^x - \int_0^x H'(t) dt = x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt$$

$$H(0) = 0 \quad H(1) = 0$$

综合应用

柯西不等式:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq (\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2 \quad \text{有} \quad \sum_{i=1}^n f_i^2 \sum_{i=1}^n g_i^2 \leq [\sum_{i=1}^n f_i g_i]^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^n f_i^2 a_i \sum_{i=1}^n g_i^2 a_i \leq (\sum_{i=1}^n f_i g_i a_i)^2$$

$$\therefore \int_a^b f^2 dx \cdot \int_a^b g^2 dx \geq (\int_a^b f g dx)^2$$



例

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, $f(0) = 0$, $0 \leq f'(x) \leq 1$, 证明:

右: 构造函数 $u(x) = (\int_0^x f(t) dt)^2$

$$v(x) = \int_0^x f^3(t) dt$$

即证 $u'(x) \geq v'(x)$

只需 $u'(0) \geq v'(0)$

$u'(x) \geq v'(x)$

积分不等式

↓
区间不等式

↓
导数不等式

$$\int_0^1 f^2(x) dx \geq \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \geq \int_0^1 f^3(x) dx.$$

当 $f(x) = 1$, 代入积分形式柯西不等式

例

10-11 期末

(1). 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续可微, $f(a) = 0$, 证明:

$$\int_a^b f^2(x) dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'^2(x) dx.$$

(2). 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续可微, $f(a) = f(b) = 0$, 证明:

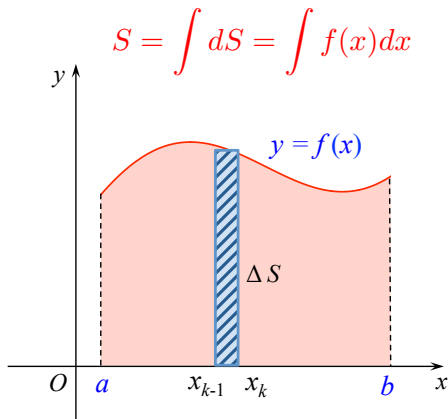
$$\int_a^b f^2(x) dx \leq \frac{(b-a)^2}{8} \int_a^b f'^2(x) dx.$$



- ① **分割**: 沿 x 轴方向分割曲边梯形
- ② **取近似**: 用小矩形的面积 ΔS 近似小曲边梯形面积
- ③ **做和**: 求所有小矩形的面积总和 $\sum \Delta S$
- ④ **求极限**: $\sum \Delta S \rightarrow S$

$$\Delta S = f(\xi) \Delta x + o(\Delta x)$$

$$\sum \Delta S = \sum f(\xi) \Delta x + \underbrace{\sum o(\Delta x)}_{\rightarrow 0} = \sum f(\xi) \Delta x$$





平面图形的面积：直角坐标系情形

例 1

计算两条抛物线 $y^2 = x$ 和 $y = x^2$ 所围图形的面积。

$$\int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

例 2

计算由抛物线 $y^2 = x$ 与直线 $x - 2y - 3 = 0$ 所围图形的面积。

交点: $(9, 3)$ $(1, -1)$

法一: $S = \int_0^1 2\sqrt{x} dx + \int_1^9 \sqrt{x} - (\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}) dx = \dots$

法二: 替换 x, y .

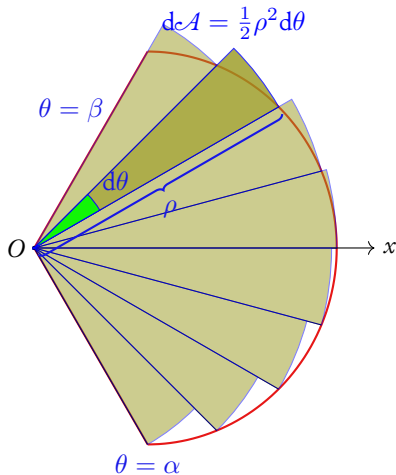
$$S = \int_{-1}^3 (2x + 3 - x^2) dx = \dots$$





由曲线 $\rho = \rho(\theta)$ 及射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 所围成的曲边扇形的面积为

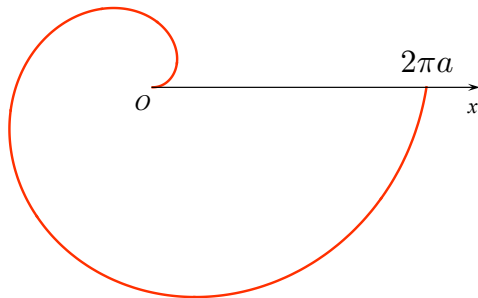
$$\mathcal{A} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [\rho(\theta)]^2 d\theta$$





例 3

计算 Archimedes 螺线 $\rho = a\theta$ ($a > 0$) 相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围的图形面积。



$$S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} a^2 \theta^2 d\theta = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{1}{3} \theta^3 \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi^3 a^2.$$



平面图形的面积：极坐标情形

例 4

计算由双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ 所围成，且在半径为 a ，圆心在原点的圆内部的图形的面积。

$$\rho^4 = 2a^2 \rho^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

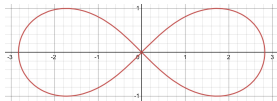
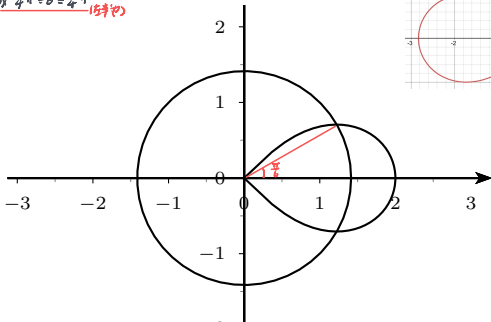
$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\theta \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \text{ 或 } \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4} \quad (\text{注意})$$

$$\rho = a\sqrt{2\cos 2\theta}$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} a^2 d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} a^2 2\cos 2\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \frac{\pi}{4} + a^2 \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \dots$$

$$S = 4A = \dots$$



参数方程表示的平面图形的面积

e.g. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

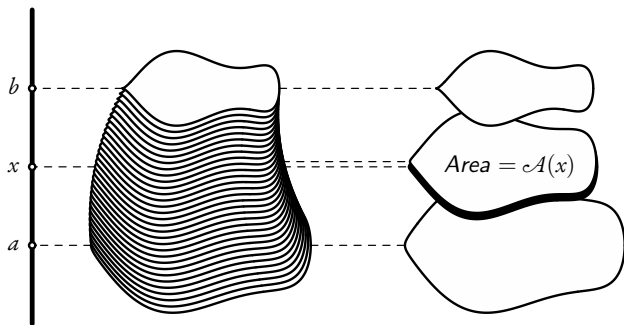
$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数}, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

注意: 上下限

$$d = \int_0^a y dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin \theta \, d(a \cos \theta) = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \, d\theta = \frac{\pi}{4} ab$$

$$S = 4d = \pi ab$$

横截面面积为已知的立体体积



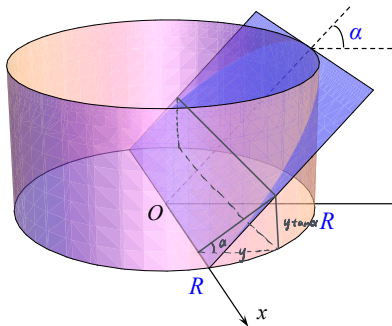
$$V = \int_a^b A(x) dx$$



横截面积为已知的立体体积

例 5

一平面经过半径为 R 的圆柱体的底面圆心，并与底面交角为 α (如图所示)，求该平面所截圆柱体的体积。



$$A(y) = z \sqrt{R^2 - y^2} \cdot y \tan \alpha$$

$$V = \int_0^R A(y) dy = z \tan \alpha \int_0^R \sqrt{R^2 - y^2} \cdot y dy$$

$$\stackrel{y = R \sin \theta}{=} z \tan \alpha R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{2}{3} R^3 z \tan \alpha$$

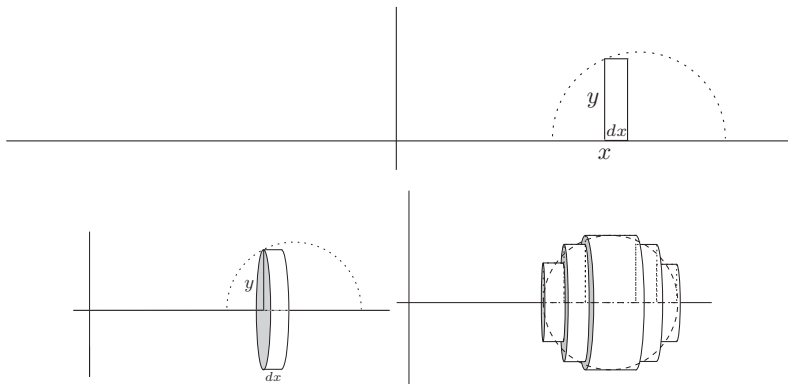
$$A(x) = \frac{1}{2} y^2 \tan \alpha = \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \tan \alpha$$

$$V = \int_{-R}^R \frac{1}{2} y^2 \tan \alpha dx = \int_0^R (R^2 - x^2) \tan \alpha dx$$



旋转体的体积

曲线 $y = f(x)$ ($x \in [a, b]$) 绕 x 轴旋转一周:



e.g. $V_{\text{球}} = \int_{-R}^R \pi (R^2 - x^2) dx$

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

$$V = \int_{-a}^a \pi b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2 \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3} ab^2$$

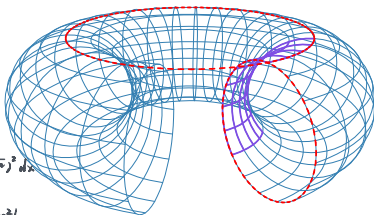
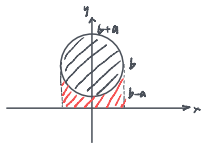
例 6

求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 绕 x 轴旋转一周所得立体的体积。

一般地：对椭圆上的点 $\Omega: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $V_\Omega = \frac{4}{3} \pi abc$

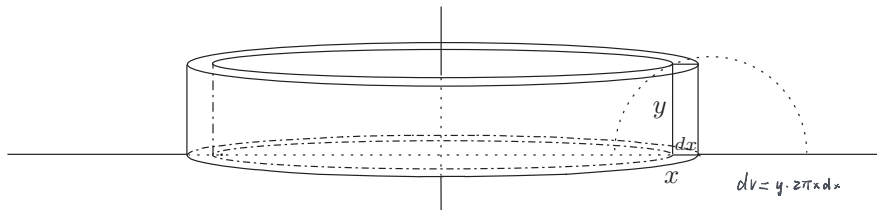
例 7

求圆域 $x^2 + (y-b)^2 \leq a^2$ ($b > a$) 绕 x 轴旋转而成的圆环体的体积。



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^a (b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 dx - \pi \int_{-a}^a (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2 dx \\ &= \pi \int_{-a}^a 4b\sqrt{a^2 - x^2} dx = 4\pi b \cdot \frac{1}{2} \pi a^2 = 2\pi^2 a^2 b. \end{aligned}$$

柱壳法求旋转体体积



$$dv = y \cdot 2\pi x dx$$

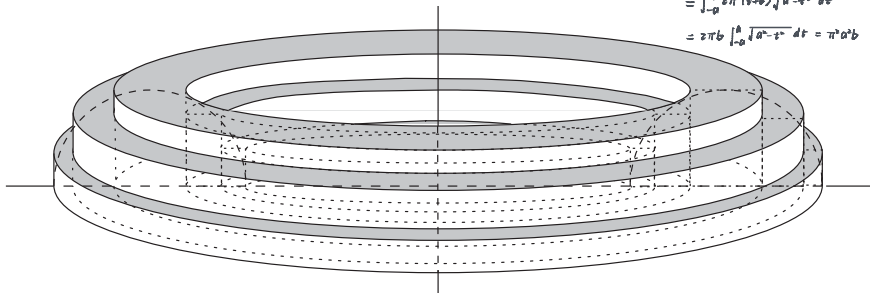
$$V = \int_a^b 2\pi x y dx$$

图：旋转薄壳

$$\frac{1}{2} V = \int_a^b \pi x \sqrt{a^2 - (x-b)^2} dx$$

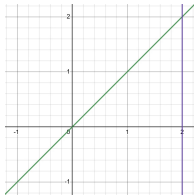
$$\stackrel{t=x-b}{=} \int_{-a}^a \pi (t+b) \sqrt{a^2 - t^2} dt$$

$$= 2\pi b \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - t^2} dt = \pi^2 a^2 b$$



$$\text{法1: } V_y = \int_0^a \pi(a^2 - y^2) dy = \frac{\pi}{3} a^3$$

$$\text{法2: } V_y = \int_0^a \pi x^2 dx = \frac{\pi}{3} a^3$$



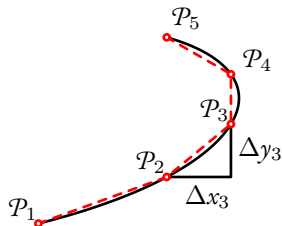
例 8

求由 $y = x$, $x = a$, 及 x 轴所围成的平面图形, 分别绕 x 轴和绕 y 轴旋转所得的旋转体的体积。



$$\Delta S = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1+y'^2} |dx|$$



任意光滑曲线弧都可求长

例 9: 求以下曲线的弧长

① $y = \frac{2}{3}x^{3/2} \quad (a \leq x \leq b) \quad y' = x^{\frac{1}{2}} \quad S = \int_a^b \sqrt{1+x} \, dx = \dots$

② $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$
 $x' = a(1 - \cos t) \quad y' = a \sin t \quad S = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} \, dt = \dots$

③ $\rho = a\theta \quad (a > 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad x = a\theta \cos \theta \quad y = a\theta \sin \theta$

$$dS = \sqrt{\rho^2 + (\rho' \theta)^2} \, d\theta$$

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \theta^2 + a^2} \, d\theta = \dots$$



① 微元法

- 发现微元:

$$d\mathcal{S}$$

- 表示微元:

$$d\mathcal{S} = f(x)dx$$

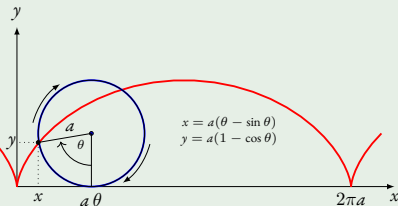
- 计算定积分:

$$\mathcal{S} = \int_a^b d\mathcal{S} = \int_a^b f(x)dx$$

例

设旋轮线 $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi, a > 0$) 与 x 轴围成一平面图形, 求

- ① 该图形的面积; $\int_0^{2\pi} y \, dx = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos \theta) \, d(a(\theta - \sin \theta)) = \dots$
- ② 该图形边界的弧长; $\int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt + 2\pi a$
- ③ 该图形绕 x 轴旋转一周的旋转体的体积;
- ④ 该图形绕 y 轴旋转一周的旋转体的体积。



1. $3\pi a^2$, 2. $8a + 2\pi a$, 3. $5\pi^2 a^3$, 4. $6\pi^3 a^3$



$$I = \int_a^b f(x) \, dx$$

- ① **有限区间:** $a, b \neq \infty$
- ② **分段连续:** $f(x)$ 最多有限多个第一类间断点
- ③ **必要条件:** $f(x)$ 有界



定义 3.4.1: (无穷限的积分)

P178

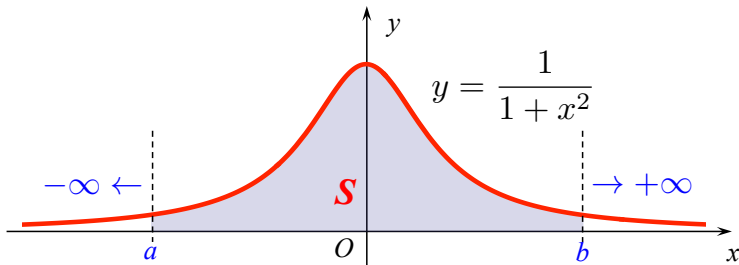
$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$$

- 类似地, 可以定义 $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$
- Newton-Leibnitz 公式

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(x)|_a^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a)$$

例 1: 计算以下无穷区间上积分

$$\textcircled{1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$



$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x - \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

例 2

① 讨论 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, $a > 0, p > 0$ 的敛散性; $p > 1$ 时收敛, $p \leq 1$ 时发散

② 证明

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x^p} dx < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} < 1 + \int_1^n \frac{1}{x^p} dx$$

③ 根据以上结论给出 p 级数的判敛条件。

p 级数: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. $p \neq 1$ 时, $\int \frac{1}{x^p} dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1} + C$
 $p = 1$ 时, $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
 $p > 1$ 时收敛, $p \leq 1$ 时发散.



无界函数的广义积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \stackrel{t=\tan x}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{a^2 \frac{t^2}{1+t^2} + b^2 \frac{1}{1+t^2}} = \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{-a^2 t^2 + b^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctan}\left(\frac{a}{b}t\right) \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{ab} \operatorname{arctan}\left(\frac{a}{b}t\right) \Big|_{-\infty}^0 = \frac{\pi}{ab}$$

定义 3.4.2

P180

- ① **瑕点**: 无穷间断点
- ② 设 a 为 $f(x)$ 的瑕点, **瑕积分**:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

例 3

计算瑕积分 $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx, a > 0.$

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \lim_{t \rightarrow a^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \lim_{t \rightarrow a^-} \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} \Big|_0^t = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \stackrel{x=at}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a \cos t} d(at) = \frac{\pi}{2}.$$

例 4: 讨论瑕积分的收敛性

$$\textcircled{1} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 + \int_0^1 = \left. -\frac{1}{x} \right|_{-1}^0 + \left. (-\frac{1}{x}) \right|_0^1$$

(发散) (发散)

$$\textcircled{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^0 + \int_0^1 = \dots = 0$$

例 5: 计算积分:

$$\textcircled{1} \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2+x^4} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2-1+\frac{1}{x^2}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+1} = \arctan(x-\frac{1}{x}) \Big|_0^{+\infty} = \pi$$

$$\begin{aligned} \text{或} &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \frac{1}{x^2+\sqrt{3}x+1} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \right] dx \\ &= \left[\arctan(2x-\sqrt{3}) + \arctan(2x+\sqrt{3}) \right] \Big|_0^{+\infty} = \pi \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} \stackrel{t=\frac{1}{x}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{t^3}}{1+\frac{1}{t^3}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^3} dx$$

$$\begin{aligned} \text{或} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} &= \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{6}) \right] = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$



向量：既有大小，又有方向的量称为向量。

- 向量的表示： $\overrightarrow{AB}$, 或 $\vec{a}$, 或 a
- 向量的相等：若 a 和 b 的大小和方向都相同，称两者相等，记为 $a = b$

向量的模：向量的大小称为向量的模，记为 $|\overrightarrow{AB}|$, 或 $|\vec{a}|$, 或 $|a|$

- 单位向量：模为 1 的向量，与 a 同方向的单位向量记作 a°
- 零向量：模为 0 的向量，记为 $\vec{0}$, 或 0



平行 若向量 a 与 b 的方向相同或相反, 则称 a 与 b 平行, 记为 $a \parallel b$.

- 规定零向量与任何向量都平行。

共线 若两个向量可平移一条直线上, 则称它们共线。

- 两向量平行等同于两向量共线。

共面 若三个或更多个向量可平移到一个平面上, 则称它们共面。



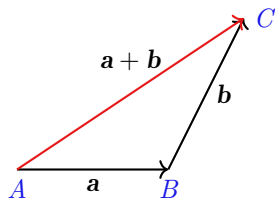
① 加法与数乘: $k\vec{a} + l\vec{a}$

② 数量积: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

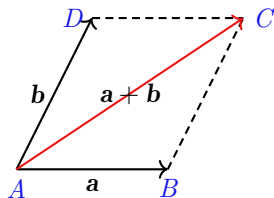
③ 向量积: $\vec{a} \times \vec{b}$

④ 混合积: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

三角形法则：



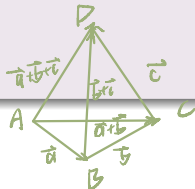
平行四边形法则：



性质

向量的加法满足下列运算定律：

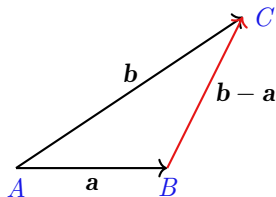
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$





与 a 大小相同而方向相反的向量, 称为 a 的**负向量**, 记为 $-a$.

三角形法则: $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$



- $a - a = 0$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$
- $|a - b| \leq |a| + |b|$



数 λ 与向量 $\mathbf{a}$ 的乘积是一个新向量, 记为 $\lambda\mathbf{a}$. 规定 $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$, 而且

- 若 $\lambda > 0$, 则 $\lambda\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 同向
- 若 $\lambda < 0$, 则 $\lambda\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 反向
- 若 $\lambda = 0$, 则 $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0}$

性质

向量的数乘满足下列性质:

- $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$
- $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a} = \mu(\lambda\mathbf{a})$
- $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$, $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$

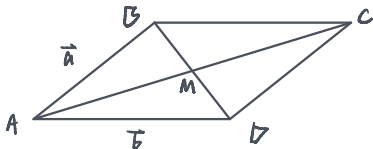
几何上, 向量的加法与数乘等价于向量的平移与放缩, 统称**向量的线性运算**

例

设 a 为非零向量, 则 $\frac{a}{|a|}$ 为单位向量。

例

设 M 为平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点, $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{AD} = b$, 试用 a 和 b 表示向量 $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MD}$.



$$\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$$

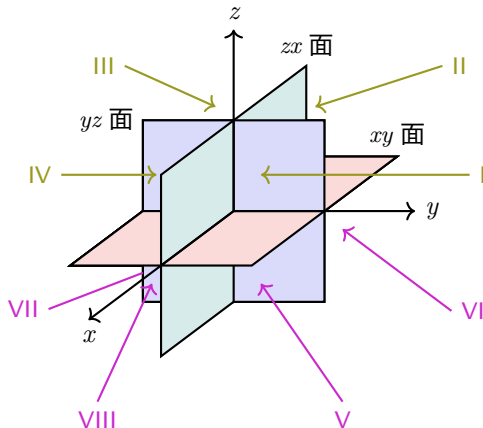
定理

设 $\mathbf{a}$ 为非零向量, 则有

$$\mathbf{b} // \mathbf{a} \iff \mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$$

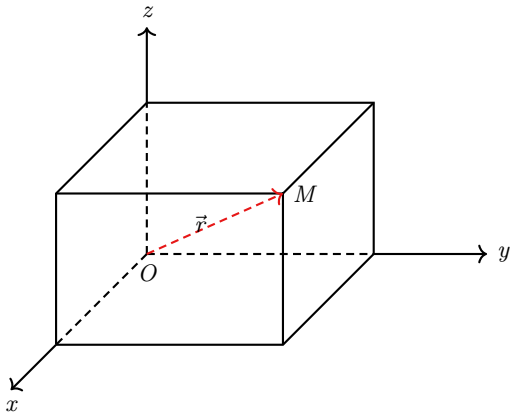
其中实数 λ 是唯一的。

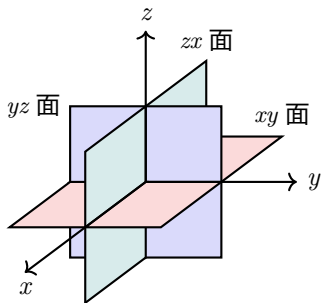
- 三个坐标轴
- 三个坐标面
- 八个卦限



在空间直角坐标系中, 我们有

点 $M \longleftrightarrow$ 坐标 $(x, y, z) \longleftrightarrow$ 向量 $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$





坐标轴上的点:

$$x \text{ 轴} \leftrightarrow y = z = 0$$

$$y \text{ 轴} \leftrightarrow z = x = 0$$

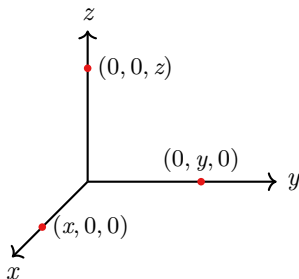
$$z \text{ 轴} \leftrightarrow x = y = 0$$

坐标面上的点:

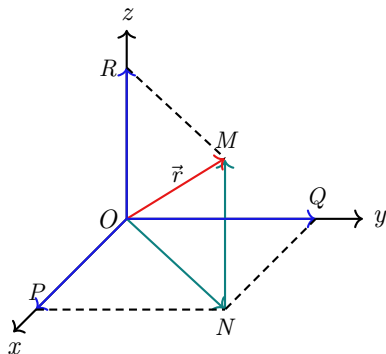
$$xy \text{ 面} \leftrightarrow z = 0$$

$$yz \text{ 面} \leftrightarrow x = 0$$

$$zx \text{ 面} \leftrightarrow y = 0$$



向量的坐标分解



- x 轴上单位向量 $\vec{i}$
- y 轴上单位向量 $\vec{j}$
- z 轴上单位向量 $\vec{k}$

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OR} \\ &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)\end{aligned}$$



设 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, λ 为实数. 由向量的坐标分解可得

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

当 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ 时, $\mathbf{b} // \mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} \Leftrightarrow \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}$

平行向量对应坐标成比例

例

求解以向量为未知元的线性方程组

$$\begin{cases} 5\vec{x} - 3\vec{y} = \vec{a} & (1) \\ 3\vec{x} - 2\vec{y} = \vec{b} & (2) \end{cases}$$

其中 $\vec{a} = (2, 1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 1, -2)$.

$$(1) \times 2 - (2) \times 3 \quad \vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = \dots$$

$$(1) \times 3 - (2) \times 5 \quad \vec{y} = 3\vec{a} - 5\vec{b} = \dots$$

$$M(x, y, z)$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = (x-x_1, y-y_1, z-z_1)$$

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} = (x_2-x, y_2-y, z_2-z)$$

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$$

$$\Rightarrow x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

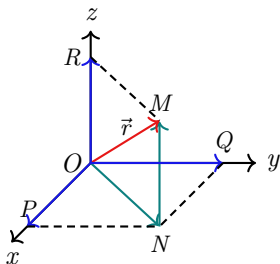
$$= \frac{1}{1+\lambda} x_1 + \frac{\lambda}{1+\lambda} x_2$$

例

已知两点 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 以及实数 $\lambda \neq -1$, 在直线 AB 上求点 M , 使得 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$.

笔记

点 M 的坐标等于向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标.



$$\begin{aligned}\vec{r} &= \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} \\ &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)\end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

设 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, 则有

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

例

求证以 $M_1(4, 3, 1)$, $M_2(7, 1, 2)$, $M_3(5, 2, 3)$ 为顶点的三角形是等腰三角形。

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{M_1 M_2} &= (3, -2, 1) \\ \overrightarrow{M_2 M_3} &= (-2, 1, 1) \\ \overrightarrow{M_1 M_3} &= (1, 1, 2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow |\overrightarrow{M_2 M_3}| = |\overrightarrow{M_1 M_3}|$$

例

在 z 轴上求与两点 $A(-4, 1, 7)$ 和 $B(3, 5, -2)$ 等距离的点。

$$\begin{aligned} 16 + 1 + (7-z)^2 &= 9 + 25 + (-2-z)^2 \\ z &= \frac{14}{9} \end{aligned}$$

例

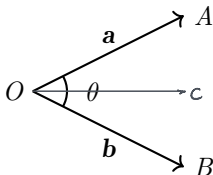
已知两点 $A(4, 0, 5)$ 和 $B(7, 1, 3)$, 求与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同的单位向量 $\vec{e}$ 。

$$\overrightarrow{AB} = (3, 1, -2)$$

$$\vec{e} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}} \right)$$



设有非零向量 a 和 b , 任取空间中一点 O , 作 $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$.



称 $\angle AOB = \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) 为向量的 a 和 b 的**夹角**, 记为 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \theta$.

求其角平分线的向量?

$$c = \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \parallel \vec{a}|\vec{b}| + |\vec{a}|\vec{b}$$



给定 $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)$, 称 $\vec{r}$ 与三个坐标轴的夹角 α, β, γ 为**方向角**。方向角的余弦称为**方向余弦**。

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{r}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{y}{|\vec{r}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{|\vec{r}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$



方向余弦满足下面性质:

- $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$
- $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \mathbf{e}_{\vec{r}}$

例

已知两点 $M_1(2, 2, \sqrt{2})$, $M_2(1, 3, 0)$, 计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模, 方向余弦和方向角。

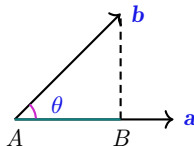
例

设点 A 位于第 I 卦限, 向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴, y 轴的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{4}$, 且 $|\overrightarrow{OA}| = 6$, 求点 A 的坐标。

$$A(3, 3\sqrt{2}, 3)$$

若 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \theta$, 记 $\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{a}$ 上的投影为

$$\text{Prj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \cos \theta$$

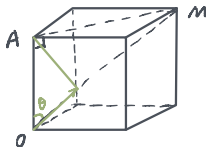


同理, 若 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, $\text{Prj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \theta$.

性质

向量投影有线性运算:

- ① $\text{Prj}_{\mathbf{c}}(\lambda \mathbf{a}) = \lambda \text{Prj}_{\mathbf{c}} \mathbf{a}$
- ② $\text{Prj}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{Prj}_{\mathbf{c}} \mathbf{a} + \text{Prj}_{\mathbf{c}} \mathbf{b}$



$$\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Prj}_{\overrightarrow{OM}} \overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}| \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

例

设正方体的一条对角线为 OM , 一条棱为 OA , 且 $|OA| = a$. 求 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OM}$ 方向上的投影 $\text{Prj}_{\overrightarrow{OM}} \overrightarrow{OA}$.



题

设三角形 $\triangle ABC$ 的三边 $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, 三边中点依次为 D, E, F . 证明

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}.$$

选择

下列哪组角可作为空间向量的方向角 (☐)

(A) $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$

(B) $45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

(C) $60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$

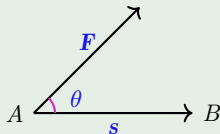
(D) $45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$



例

设一物体在常力 F 作用下, 沿与力夹角为 θ 的直线移动, 位移为 s . 则力 F 所做的功为

$$W = |\mathbf{F}| |s| \cos \theta = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$$



定义

设向量 a 和 b 的夹角为 θ , 称

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$$

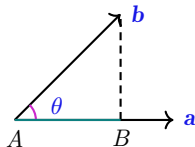
为 a 与 b 的**数量积** (点乘)。



数量积与投影的关系如下：

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = |\mathbf{a}| \operatorname{Prj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$$

同理，我们有 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{b}| |\mathbf{a}| \cos \theta = |\mathbf{b}| \operatorname{Prj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$ 。





推论

$$\textcircled{1} \cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$$

$$\textcircled{2} |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

(Cauchy-Schwartz 不等式)

$$\textcircled{3} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$$

性质

向量的数量积符合下列运算定律:

$$\textcircled{1} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$$

$$\textcircled{2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

$$\textcircled{3} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

$$\textcircled{4} (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

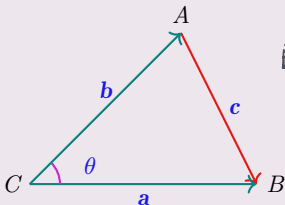
例

试用向量证明三角形的余弦定理

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

解

设 $\overrightarrow{CB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$ 。



$$\begin{aligned}\mathbf{c} &= \mathbf{a} - \mathbf{b} \\ c^2 &= \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2 \\ \text{即: } c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta\end{aligned}$$



设 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则有

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

对于非零向量, 由 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$, 得

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

此式即为两向量的夹角公式。

例

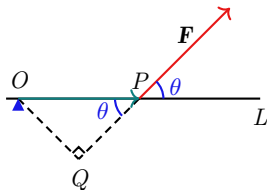
已知三个点 $M(1, 1, 1)$, $A(2, 2, 1)$ 和 $B(2, 1, 2)$, 求 $\angle AMB$.



例

设 O 为杠杆 L 的支点，有一个与杠杆夹角为 θ 的力 F 作用在杠杆的 P 点上。则力 F 作用在杠杆上的力矩 M 是一个向量：

- $|\mathbf{M}| = |\mathbf{OQ}| |\mathbf{F}| = |\overrightarrow{OP}| |\mathbf{F}| \sin \theta$
- $\mathbf{M} \perp \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{M} \perp \mathbf{F}$, $\overrightarrow{OP}$ 、 $\mathbf{F}$ 、 $\mathbf{M}$ 符合右手定则



定义

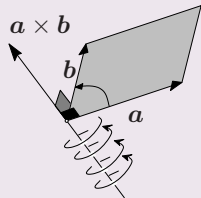
设 a 与 b 的夹角为 θ , 定义向量 c

大小: $|c| = |a| |b| \sin \theta$

方向: $c \perp a$, $c \perp b$ 且 a, b, c 符合右手定则

称 c 为向量 a 与 b 的**向量积** (叉乘), 记为

$$a \times b = c$$





向量积的性质

性质

规定零向量和任何向量都平行, 则有

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \iff \mathbf{a} // \mathbf{b}$$

性质

向量的向量积符合下列运算定律:

- ① **反交换律:** $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
- ② (数乘) 结合律: $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$
- ③ 分配律:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$$

- ④ $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ (零向量)
- ⑤ $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \iff \mathbf{a}, \mathbf{b}$ 平行

无结合律



设 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则有

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right) \\ &= (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)\end{aligned}$$

其中二阶行列式的定义为 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.



定义

设 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 记 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 分别为 x, y, z 轴对应的方向向量, 则

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$



例

证明: $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.$

性质

- ① $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 均垂直
- ② $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 服从 “右手法则”
- ③ $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta$, 其中 θ 为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的夹角
- ④ $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ 等于以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为邻边的平行四边形的面积

例

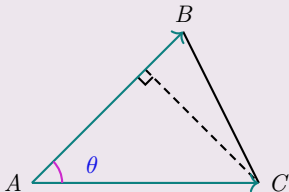
已知三角形 ABC 的三个顶点为

$$A(1, 2, 3), B(3, 4, 5), C(2, 4, 7),$$

- ① 求垂直于该三角形所在平面的单位向量;
- ② 求该三角形的面积

解

$$S = \frac{1}{2} |AB| |AC| \sin \theta = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$





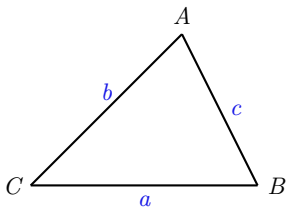
题

已知向量 a 和 b 的夹角 $\theta = \frac{3\pi}{4}$, 且 $|a| = \sqrt{2}$, $|b| = 3$, 求 $|a - b|$. $\dots \sqrt{17}$

题

证明三角形的正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$





题

在顶点为 $A(1, -1, 2)$, $B(1, 1, 0)$, $C(1, 3, -1)$ 的三角形中, 求 AC 边上的高 BD 的长度. $\frac{2}{5}$



选择

下列关系式错误的是 (D)

(A) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

(B) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

(C) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$

(D) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \vec{0}$

选择

设 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 是非零向量, 且满足 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, 则必有 (C)

(A) $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$

(B) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$

(C) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

(D) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

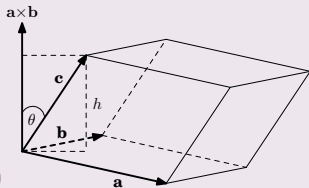
性质

$$\textcircled{1} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$\textcircled{2} [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}]$$

$\textcircled{3}$ **几何意义:** 以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为邻边的平行六面体体积

$$\textcircled{4} [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ 共面}$$





① 向量的表示

② 向量的运算及其性质

- 线性运算：平移、放缩
- 数量积：投影、夹角
- 向量积：正交、面积
- 混合积：体积

数量积的应用:

1. 向量的模 $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$
2. 两向量的夹角 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$
3. $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影 $Pr_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$
4. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

向量积的应用:

1. 同时垂直于 $\vec{a}, \vec{b}$ 的向量 $k(\vec{a} \times \vec{b})$
2. 以 $\vec{a}, \vec{b}$ 为邻边的平行四边形的面积 $|\vec{a} \times \vec{b}|$
3. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a}$

混合积的应用:

1. 求 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 构成的平行六面体的体积 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$
2. 判断 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是否共面 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面 $\Leftrightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$



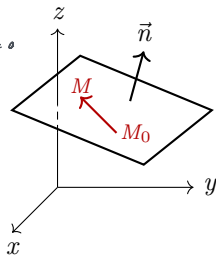
设一平面通过已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且垂直于非零向量 $\vec{n} = (A, B, C)$, 求该平面 Π 的方程。

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$M(x, y, z) \quad \vec{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$\vec{n} \perp \vec{M_0M} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{M_0M} = 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

- 称它为平面的点法式方程,
- 称 $\vec{n}$ 为平面的法向量。



例

求过点 $(1, 1, 1)$ 且以 $\vec{n} = (2, 3, 4)$ 为法向量的平面的方程。

$$\begin{aligned} 2(x-1) + 3(y-1) + 4(z-1) &= 0 \\ \Rightarrow \pi: 2x + 3y + 4z - 9 &= 0 \end{aligned}$$

例

已知三个点坐标 $M_1(0, 0, 1)$, $M_2(1, 1, 0)$ 和 $M_3(1, 0, 1)$, 求过这三个点的平面的方程。

$$\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k}$$

$$\vec{n} \text{ 可取为 } \vec{n} = (1, 1, 1)$$

$$\pi: y + z - 1 = 0$$



平面的点法式方程

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

等价于平面的一般方程

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

改写为点法式: $A(x + \frac{D}{A}) + B(y - 0) + C(z - 0) = 0$

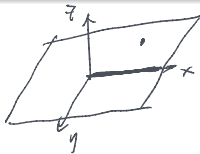
平面的一般方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$.

- $D = 0$ 表示平面过原点
- ◇ $A = 0$ 表示平面平行于 x 轴
- ◇ $B = 0$ 表示平面平行于 y 轴
- ◇ $C = 0$ 表示平面平行于 z 轴
- $A = B = 0$ 表示平面平行于 xy 面
- $A = C = 0$ 表示平面平行于 xz 面
- $B = C = 0$ 表示平面平行于 yz 面

例

求通过 x 轴和点 $(4, -3, -1)$ 的平面的方程。

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (0, 1, -3)$$

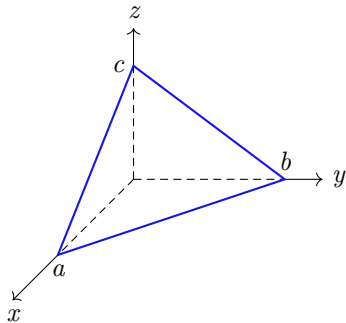


例

设一平面与三个坐标轴的交点分别为 $P(a, 0, 0)$ 、 $Q(0, b, 0)$ 、 $R(0, 0, c)$ 。求该平面的方程。

平面方程 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

这称为平面的截距式方程。

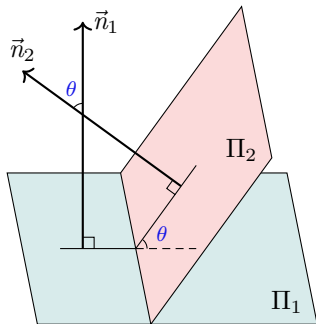


设平面 Π_1 和 Π_2 的法向量分别为 $\vec{n}_1$ 和 $\vec{n}_2$, 则两平面的夹角 θ 的余弦为

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

若 $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, 则有

$$\cos \theta = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$





$$\Pi_1 : \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$$

$$\Pi_2 : \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

$$\Pi_1 \perp \Pi_2 \iff \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$$

$$\iff A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

$$\Pi_1 // \Pi_2 \iff \vec{n}_1 // \vec{n}_2$$

$$\iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$$

$$\vec{n}_1 = (1, -1, 2)$$

$$\vec{n}_2 = (2, 1, 1)$$

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

例

求两平面 $x - y + 2z - 6 = 0$ 和 $2x + y + z - 5 = 0$ 的夹角。

例

一平面通过两点 $M_1(1, 1, 1)$ 和 $M_2(0, 1, -1)$ 且垂直于平面 $x + y + z = 0$, 求它的方程。

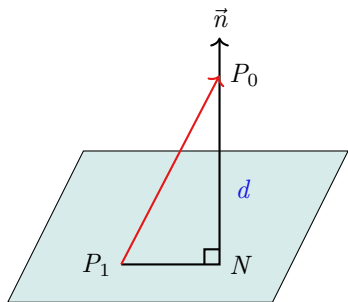
$$\overrightarrow{M_1M_2} = (-1, 0, -2)$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2, 1, -1)$$

$$\pi: 2(x-1) + (y-1) - (z-1) = 0$$

例

设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 外一点, 求 P_0 到该平面的距离。



$$d = |\text{Pr}_{\vec{n}} \vec{P_0 P_1}| = \frac{|\vec{P_0 P_1} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \left. \vphantom{\frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}} \right\} \Rightarrow \dots$$

又 P_1 在平面内, $D = -(Ax_1 + By_1 + Cz_1)$

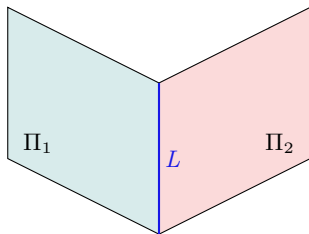
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



1. 直线的一般式方程

空间直线可视为两平面的交线，其一般式方程为

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$





2. 直线的对称式方程

已知直线上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和其方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$, 则它的方程为

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

此式称为直线的对称式方程或点向式方程、标准式方程。



3. 直线的参数式方程

在对称式方程中令

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t$$

得到直线的参数式方程:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$

例

20 期末

将直线的一般式方程 $\begin{cases} x - y + z + 5 = 0 \\ 5x - 8y + 4z + 36 = 0 \end{cases}$ 化为点向式方程及参数式方程。

注：直线方向也可通过求直线上的两点来确定。

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -8 & 4 \end{vmatrix} = (4, -1, -3)$$

取直线上一点 $(-2, 3, 0)$

点向式: $l: \frac{x+2}{4} - \frac{y-3}{1} - \frac{z}{3} = 0$

参数式: $\begin{cases} x = 4t - 2 \\ y = -t + 3 \\ z = -3t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$



两直线的夹角, 是指两者的方向向量的夹角 (取锐角或直角).

设直线 L_1 和 L_2 的方向向量分别为

$$\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1), \quad \vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2),$$

则有

$$\cos \theta = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|} = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$



$$\begin{array}{l} L_1 : \vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1) \\ L_2 : \vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2) \end{array} \qquad \cos \theta = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|}$$

$$\begin{aligned} L_1 \perp L_2 &\iff \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \\ &\iff m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1 // L_2 &\iff \vec{s}_1 // \vec{s}_2 \\ &\iff \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \end{aligned}$$

注记

在空间中，两条直线垂直时未必相交.

例

求直线 L_1 和 L_2 的夹角。

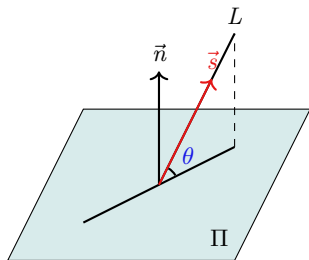
$$L_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{1}$$

$$L_2 : \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{-1}$$

当直线和平面不垂直时, 直线和它在平面上的投影直线所夹锐角 θ , 称为直线和平面的夹角。

$$\sin \theta = \cos \langle \vec{s}, \vec{n} \rangle = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| |\vec{n}|}$$

当直线和平面垂直时, 规定它们的夹角为 $\frac{\pi}{2}$.





设直线 L 的方向向量为 $\vec{s} = (m, n, p)$, 平面 Π 的法向量为 $\vec{n} = (A, B, C)$, 则两者夹角满足

$$\sin \theta = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| |\vec{n}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

$$L \perp \Pi \iff \vec{s} // \vec{n} \iff \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

$$L // \Pi \iff \vec{s} \perp \vec{n} \iff Am + Bn + Cp = 0$$

例

求过点 $(1, -2, 4)$ 且与平面 $2x - 3y + z - 4 = 0$ 垂直的直线的方程。

$$l: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{1}$$

例

求与两平面 $x - 4z = 3$ 和 $2x - y - 5z = 1$ 的交线平行，且过点 $(-3, 2, 5)$ 的直线的方程。

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = (-4, -3, -1) \quad l: \frac{x+3}{-4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-5}{-1}$$

$$\text{不妨取 } \vec{s} = (4, 3, 1)$$

例

求直线 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x + y + z - 6 = 0$ 的交点。

<法一: 联立>

<法二: 直线的参数方程>

$$\begin{cases} x = t+2 \\ y = t+3 \\ z = 2t+4 \end{cases} \text{ 代入平. } t = -1$$

交点 $(1, 2, 2)$

过直线

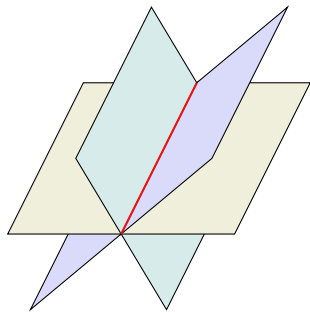
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

的平面束的方程为

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)$$

$$+ \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

其中, λ_1, λ_2 不全为零。





在平面束方程 (λ_1, λ_2 不全为零)

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

中通常固定 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda$, 得到简化写法

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

注记

简化写法缺少平面 $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

求 $L \begin{cases} -x+y+z+2=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ 在平面 $\pi: x+y+z=2$ 上的投影 L_1

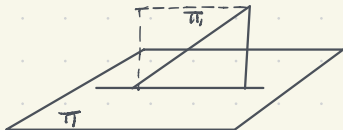
平面束: $(1-\lambda)x + (1-\lambda)y + (\lambda+1)z + 2-\lambda = 0$

$\pi_1 \perp \pi: (1-\lambda, 1-\lambda, \lambda+1) \perp (1, 1, 1)$

$\Rightarrow \lambda = -1$

$\pi_1: -2x + 2y + 3 = 0$

$L_1: \pi \cap \pi_1 = \begin{cases} x+y+z=2 \\ -2x+2y+3=0 \end{cases}$



求原点 $(0,0,0)$ 到 L_1 的距离 d

求 L_1 上一点 $M(\frac{7}{4}, \frac{1}{4}, 0)$ $\vec{S}_1 = (1, 1, -2)$ 先求 L_1 点向式方程

原点到 L_1 的距离

$$d = \frac{|\vec{MP} \times \vec{S}_1|}{|\vec{S}_1|} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{7}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{59}}{2\sqrt{6}}$$

求原点 $(0,0,0)$ 到 L 的距离 d

L 的点向式方程 $x = y + \frac{3}{2} = \frac{z+1}{0}$

$\vec{S} = (1, 1, 0)$

$d = \frac{|\vec{OP} \times \vec{S}|}{|\vec{S}|} = \dots$



如何用向量或坐标的形式表示空间中各种几何对象间的位置关系？

- ① 点到平面的距离
- ② 点到直线的距离
- ③ 两平面的夹角
- ④ 两直线的夹角
- ⑤ 直线与平面的位置关系



1、点到平面的距离

问题：求点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离 d

投影法： $d =$ 平面上任一点 M 到 P 的连线在平面法向量 $\mathbf{n}$ 上的投影长度

$$d = \text{Prj}_{\mathbf{n}} \mathbf{MP} = \frac{|\mathbf{MP} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$$

即

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\pi: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

?

例

设 a, b, c 分别为某平面在三个坐标轴上的截距, d 为其到原点的距离, 证明:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{d^2}$$

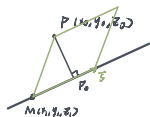
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



2、点到直线的距离

问题：求点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 到直线

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$$



的距离 d

利用向量叉乘的几何意义: 记 $s = (m, n, p)$

$$d = \frac{|MP \times s|}{|s|} = \frac{S_{\text{平行四边形}}}{底边长}$$



3、两平面的夹角

问题：求两平面 $\pi_i: A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0, i = 1, 2$ 的夹角 θ
记 $\mathbf{n}_i = (A_i, B_i, C_i), i = 1, 2$, 则

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

- $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$
- $\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 // \mathbf{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

4、两直线的夹角



问题：求两直线

$$L_i: \frac{x - x_i}{m_i} = \frac{y - y_i}{n_i} = \frac{z - z_i}{p_i}, \quad i = 1, 2$$

的夹角 θ

记 $s_i = (m_i, n_i, p_i)$, $i = 1, 2$, 则

$$\cos \theta = \frac{s_1 \cdot s_2}{|s_1| |s_2|}$$



5、直线与平面的位置关系

已知直线和平面:

$$L: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p},$$

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0.$$

记 $s = (m, n, p)$, $\mathbf{n} = (A, B, C)$, 则

❶ **夹角:** $\sin \theta = \frac{|\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{s}||\mathbf{n}|}$

❷ $L \perp \pi \Leftrightarrow \mathbf{s} // \mathbf{n} \Leftrightarrow \frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}$

❸ $L // \pi \Leftrightarrow \mathbf{s} \perp \mathbf{n} \Leftrightarrow mA + nB + pC = 0$



① 如何判断两个平面相交？

- 若不平行，必相交

② 如何判断直线和平面是否相交？

- 若不平行，必相交

③ 如何判断两直线是否相交？

- 将一条直线的参数方程代入另一直线的方程，判断是否有解
- 两直线距离是否为零, $(s_1, s_2, \overrightarrow{P_1 P_2}) = 0$?
- 过一直线做另一直线的平行面，求该面与后者的距离

④

投影: $P_1(-1, 3, 1) \in L$ $\vec{s} = (2, 3, -1)$

$$d = \frac{|\vec{PP}_1 \times \vec{s}|}{|\vec{s}|} = \dots = 2\sqrt{6}$$

设 L 上一点 $P_0(x_0, y_0, z_0) = (-t+1, 3t+1, -t+1)$.

$$\vec{PP}_0 \perp \vec{s} \Rightarrow t=1. \quad P_0(1, 4, 0)$$

$$\text{故 } d = |\vec{PP}_0| = \dots$$

例

求点 $P(5, 4, 2)$ 在直线 $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{-1}$ 上的投影, 并求点 P 到直线的距离。

例

求直线 $\frac{x-5}{-4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$ 在平面 $x+2y+4z=2$ 上的投影和投影平面的方程。

求直线的方向向量 $\vec{s} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2$.

求距离 $d = \frac{|\vec{MP} \cdot \vec{s}|}{|\vec{s}|} = \dots$

法一: 平面交线法

例

求公垂线方程



法二: 参数方程-平面法

法三: 参数方程法

求异面直线 $x-3=y-4=-z-1$ 与 $\frac{x+4}{2} = \frac{y+1}{4} = -z$ 之间的距离, 并求公垂线的方程。

$$\vec{s}_1 = (1, 1, -1)$$

$$\vec{s}_2 = (2, 4, -1)$$

$$(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) \cdot \vec{P_1P_2} = \begin{vmatrix} -7 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ 异面} = 14$$

$$P_1(3, 4, -1)$$

$$P_2(-4, -1, 0)$$

$$\vec{P_1P_2} = (-7, -5, 1)$$

L 与 $\pi: 2x + y + z = 1$ 垂直

并且与 $L_1: x - 1 = y + 2 = z - 3$ $L_2: \frac{x}{3} = \frac{y-2}{2} = z$ 都相交

求 L 的方程

$$\text{令 } l_1: x-1=y+2=z-3=s, l_2: \frac{x}{3} = \frac{y-2}{2} = z=t$$

$$\text{交点 } P_1(s+1, s-2, s+3) \quad P_2(3t, 2t+2, t)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \parallel \vec{s} \quad s=2, t=-7$$

求以 $L: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ 为对称轴, 半径为2圆柱面方程

P 在圆柱面上 $\Leftrightarrow P$ 到 L 的距离为2.

$$\frac{|\overrightarrow{PO} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|} = 2$$



题

一直线过点 $A(1, 2, 1)$ 且垂直于直线

$$L_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$$

又和直线

$$L_2 : \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$$

相交, 求此直线方程.

答案

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-5}.$$



题

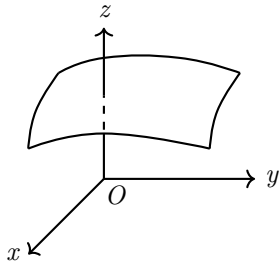
求过点 $M_0(1, 1, 1)$ 且与两直线 $L_1 : \begin{cases} y = 2x \\ z = x - 1 \end{cases}$ 和 $L_2 : \begin{cases} y = 3x - 4 \\ z = 2x - 1 \end{cases}$ 都相交的直线 L .

答案

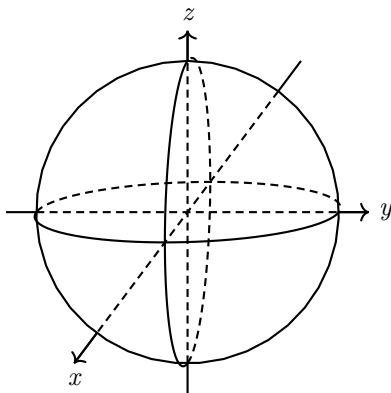
$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}.$$

- 方程 $F(x, y, z) = 0$ 对应一个曲面 S
- 曲面 S 对应一个方程 $F(x, y, z) = 0$

完备性、纯粹性



- 球心在原点, 半径为 R 的球面
- 方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



三维空间中任意曲面均可用含有两个参数的方程表示

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

例

求以原点为球心, $R (R > 0)$ 为半径的球面的参数方程。

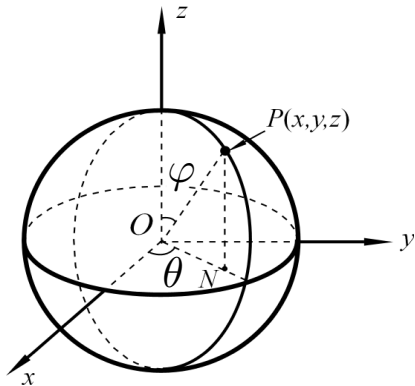
- 以 x, y 为参数:

$$x = u, \quad y = v, \quad z = \pm \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}, \quad (u^2 + v^2 \leq R^2)$$

- 以角度为参数: (球面的极坐标方程)

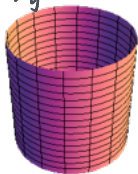
$$\begin{cases} x = R \sin \varphi \cos \theta, \\ y = R \sin \varphi \sin \theta, \\ z = R \cos \varphi, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \end{pmatrix}$$

球面的极坐标方程

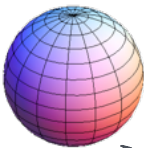


$$\begin{cases} x = R \sin \varphi \cos \theta, \\ y = R \sin \varphi \sin \theta, \\ z = R \cos \varphi, \end{cases}$$

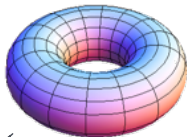
$$\begin{pmatrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \end{pmatrix}$$



由 $y = a$.
有 $\pm \sqrt{x^2 + y^2} = a$.
圓柱面: $x^2 + y^2 = a^2$

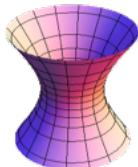


由 $y^2 + z^2 = a^2$ 有界
代入 $\pm \sqrt{a^2 - y^2} = z$
 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$



$$(y-1)^2 + z^2 = R^2$$

$$(x\sqrt{x^2+y^2} - 1)^2 + z^2 = R^2$$



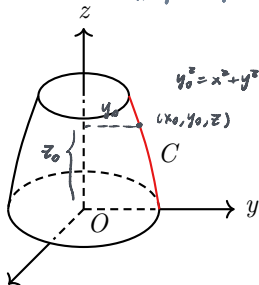
$$y^2 - z^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

求曲线 $C: f(y, z) = 0$ 绕 z 轴旋转一周所得曲面

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$$

曲线 C 称为旋转曲面的**母线**



原 $f(y, z) = 0$

到乙轴距离不变

$$y_0^2 = x^2 + y^2$$

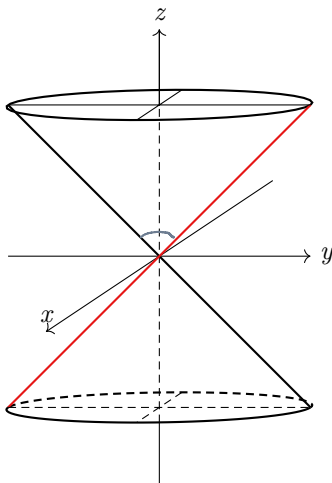
$$y_0 = \pm \sqrt{\lambda^2 + y^2}$$

故 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$



$$y=z \Rightarrow \pm\sqrt{x^2+y^2}=z$$
$$\text{即 } x^2+y^2-z^2=0$$

- yz 面上的直线 $z = ay$ 绕 z 轴旋转一周
- 圆锥面 $z^2 = a^2(x^2 + y^2)$
 $a \uparrow$, 张口 $\downarrow$



例1 求以三条坐标轴为母线的圆锥面的方程.

母线与轴线的夹角固定

故轴线方向 $S = (1, 1, 1)$

$$\cos \alpha = \frac{(1, 0, 0) \cdot (1, 1, 1)}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{若 } (x, y, z) \in S, \text{ 则 } \frac{|(x, y, z) \cdot (1, 1, 1)|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$|x + y + z| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$S: xy + yz + xz = 0$$

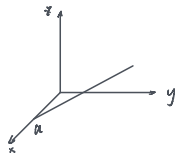
求锥面方程一般步骤:

$$\text{准线: } \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = h \end{cases} \quad \text{过原点和点 } (x_0, y_0, z_0) \text{ 的直线 } \begin{cases} x = tx_0 \\ y = ty_0 \\ z = tz_0 \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$

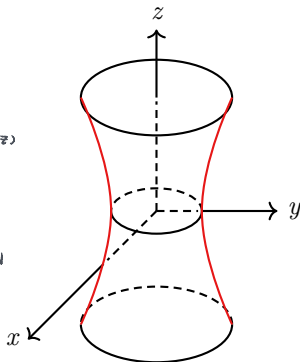
$$\text{顶点为原点的锥面方程 } \begin{cases} f(tx, ty) = 0 \\ tz = h \end{cases} \quad \text{化简可得 } f\left(\frac{hx}{z}, \frac{hy}{z}\right) = 0$$

将 yz 面上的双曲线 $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 绕 z 轴旋转一周, 得到旋转单叶双曲面 $\frac{x^2+y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. (实例: 广州塔)

直线也可生成单叶双曲面.

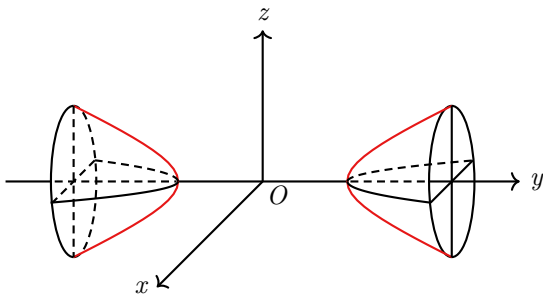


$$\begin{aligned}
 l: & \begin{cases} x=0 \\ y=kz \end{cases} \\
 (0, y_0, z_0) & \rightarrow (x, y, z) \\
 \sqrt{0^2 + y_0^2} &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
 y_0 &= kz_0 \\
 z_0 &= z_0 \\
 \Rightarrow & \frac{x^2 + y^2}{k^2 z_0^2} - \frac{z_0^2}{z_0^2} = 1
 \end{aligned}$$

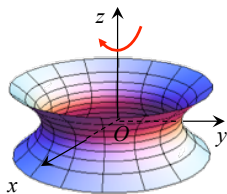




将 yz 面上的双曲线 $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 绕 y 轴旋转一周, 得到旋转双叶双曲面 $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2+z^2}{c^2} = 1$.

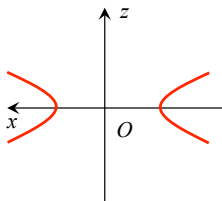


单叶双曲面

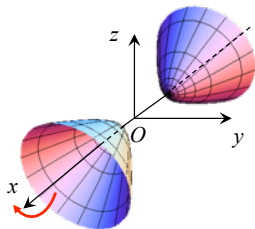


$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

双叶双曲面



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1$$

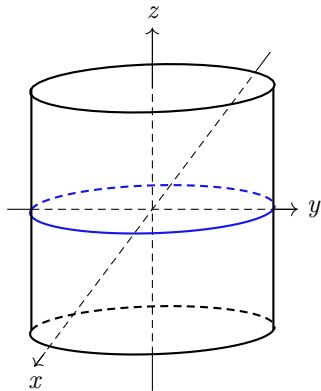
例

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{圆柱面} \quad \text{椭圆截面 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

由平行于 z 轴的直线沿 xy 面上的圆 $x^2 + y^2 = R^2$ 移动而得。

准线: xy 面的圆 $x^2 + y^2 = R^2$.

母线: 平行于 z 轴的直线。



一般地, 方程 $F(x, y) = 0$ 在空间中表示一个柱面。

例1 轴线 $\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ 2x+z+3=0 \end{cases}$, 点 $P(1, -2, 1)$ 在圆柱上, 求圆柱面的方程.

柱面上的点到轴线的距离相等.

轴线方向: $\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, 2)$

轴线过点 $(0, 1, -3)$

$$P(x, y, z) \in S \Leftrightarrow d_{pe} = d_{pl}$$

$$\frac{|\overrightarrow{PO} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|} = \frac{|\overrightarrow{PO_1} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$$

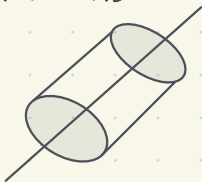
$$\overrightarrow{PO} = (x, y-1, z+3) \quad \overrightarrow{PO_1} = (1, -3, 4)$$

$$\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y-1 & z+3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \right\| = \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \right\|$$

$$| [z(y-1)+2(z+3), -2x-(z+3), -2x+y-1] | = |(z, -6, -5)|$$

$$(zy+z+4)^2 + (2x+z+3)^2 + (2x-y+1)^2 = 4+36+25$$

$$S: \dots$$

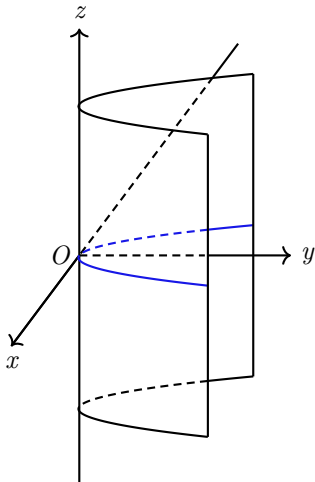


例

$y = x^2$ 抛物柱面

准线 xy 面上的抛物线 $y = x^2$

母线 平行于 z 轴的直线

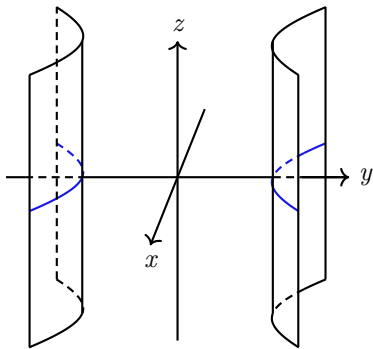


例

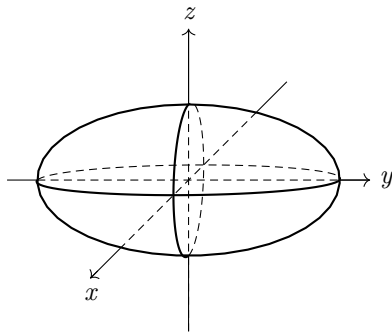
$$y^2 - x^2 = 1 \quad \text{双曲柱面}$$

准线 xy 面上的双曲线

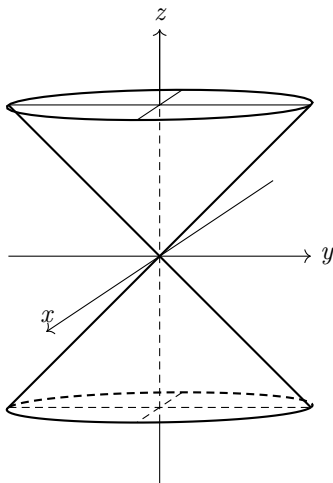
母线 平行于 z 轴的直线



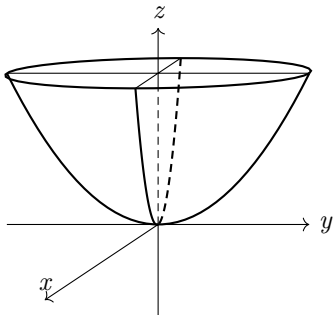
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$$



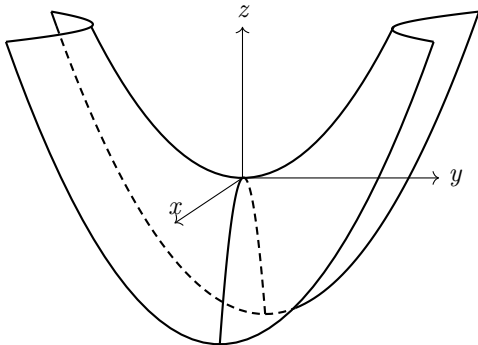
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



- $z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

- 又称为**马鞍面**

$$\begin{aligned} & y^2 - x^2 = z \\ & (y-x)(y+x) = z \\ & l: \begin{cases} y-x=0 \\ y+x=\frac{z}{a} \end{cases} \end{aligned}$$





定义：三元二次多项式方程

$$\begin{aligned} a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + b_1xy + b_2yx + b_3zx \\ + c_1x + c_2y + c_3z + d = 0 \\ (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0) \end{aligned}$$

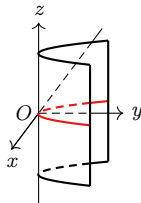
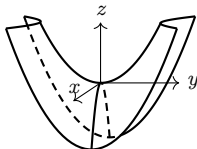
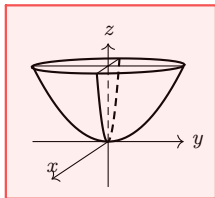
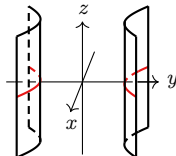
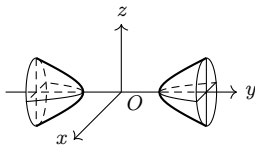
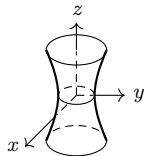
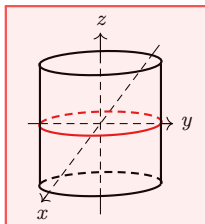
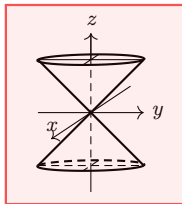
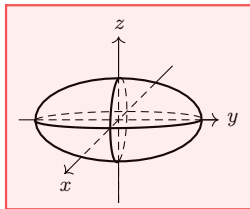
常见的二次曲面

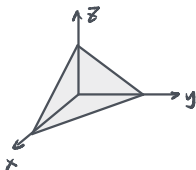
- 椭球面
- 单叶双曲面
- 双叶双曲面
- 椭圆 (双曲, 抛物) 柱面
- 椭圆抛物面
- 双曲抛物面
- 椭圆锥面



椭圆型	椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$	椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
双曲型	单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	双曲柱面 $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
抛物型	椭圆抛物面 $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	双曲抛物面 $z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	抛物柱面 $x = ay^2$

二次曲面的图形





到三个坐标平面距离相等.

设球心 (a, a, a)

$$\frac{13a-1}{\sqrt{3}} = a \quad a = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \text{ (舍去大值)}$$

$$r = a = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

题

求内切于平面 $x + y + z = 1$ 与三个坐标面所构成四面体的球面方程.

$$\left(x - \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(z - \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2$$



选择

下列结论中，错误的是 (B)

- (A) $z + 2x^2 + y^2 = 0$ 表示椭圆抛物面
- (B) $x^2 + 2y^2 = 1 + 3z^2$ 表示双叶双曲面 单叶
- (C) $x^2 + y^2 - (z - 1)^2 = 0$ 表示圆锥面
- (D) $y^2 = 5x$ 表示抛物柱面



空间曲线的参数方程

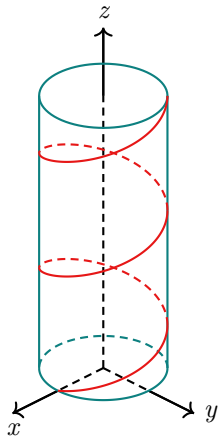
任意曲线都可以视为动点的运动轨迹

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

例：以下方程表示何种曲线

① $x = \cos t, y = \sin t, z = t (t \in \mathbb{R})$ 螺旋线 (圆柱螺旋线)

② $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t (t \in \mathbb{R})$ 圆锥螺旋线

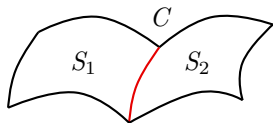


空间曲线的一般式方程



空间曲线可视为两个曲面的交线。

其一般方程为方程组



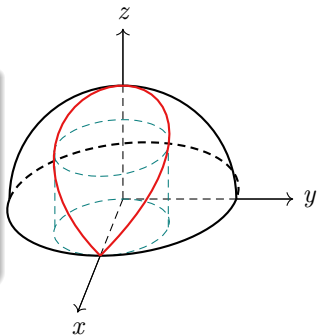
$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

例

方程组

$$\begin{cases} z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 - Rx = 0 \end{cases}$$

表示上半球面和圆柱面的交线。(Viviani 曲线)



例

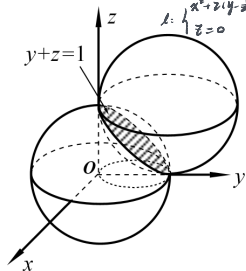
求空间曲线 $C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 & \textcircled{1} \\ x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 & \textcircled{2} \end{cases}$ 在 xOy 平面上的投影曲线方程。

$$\textcircled{1} - \textcircled{2}: y + z = 1$$

关键: 找投影柱面

$$\text{由 } \textcircled{1}: x^2 + y^2 + (1-y)^2 = 1 \text{ (柱面)}$$

$$L: \begin{cases} x^2 + 2(y-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases}$$



曲线在 xOy 上的投影 = 变量 x, y 满足的柱面方程与 xOy 平面的交线



空间曲线:

$$C: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

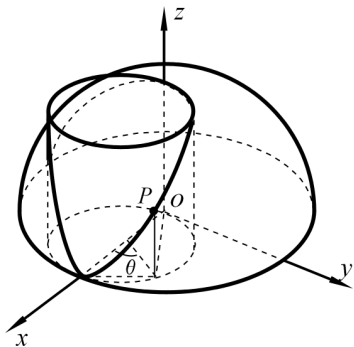
消去 z , 所得方程

$$H(x, y) = 0$$

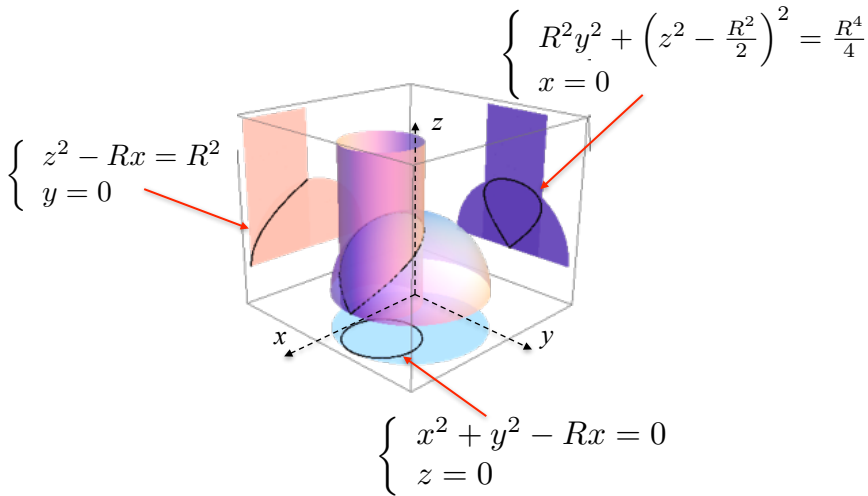
- 曲线 C 关于 xOy 平面的**投影柱面**
- xOy 平面内的一条曲线—— **C 的投影曲线**

求

Viviani 曲线在各坐标面上的投影曲线，并由此写出 Viviani 曲线的参数方程。



$$\begin{cases} z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 - Rx = 0 \end{cases}$$



$$x = \frac{R}{2}(1 + \cos \theta), \quad y = \frac{R}{2} \sin \theta, \quad z = R \sin \frac{\theta}{2}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$



① 函数

- 函数的定义域、值域，基本表示形式
- 基本初等函数的性质及图形，初等函数的概念与性质
- 函数表示的多样性：隐函数，极坐标，参数方程等

② 极限

- 极限的保号性： $\lim_{x \rightarrow \bullet} f(x) = A \Leftrightarrow \exists \overset{\circ}{N}_\delta(\bullet), f(x) = A + o(1)$
- 极限的计算方法：两个重要极限，三个收敛准则，极限运算法则，等价无穷小，洛必达法则，泰勒公式

③ 连续

- 根据定义判断间断点，初等函数的连续性
- 有界闭区间上连续函数的性质



④ 导数和微分

- 定义与性质, 微分形式不变性的运用
- 复合函数微分法, 隐函数微分法及参数微分法

⑤ 导数的应用

- 以三个中值定理为依据, 通过函数增量研究函数性质
- 函数零点与导函数零点的关系, 求极限, 函数性质 (增减凹凸), 函数图形及渐近线, 泰勒公式



⑥ 不定积分

- 原函数概念、不定积分概念
- 三个基本方法、一个可积类型

⑦ 定积分

- 概念和性质, 中值定理, 广义积分
- 原函数、导函数及变上限定积分之间的关系
- 定积分计算方法的特点: 对称性

⑧ 定积分的应用

- 面积、弧长、旋转体体积及表面积

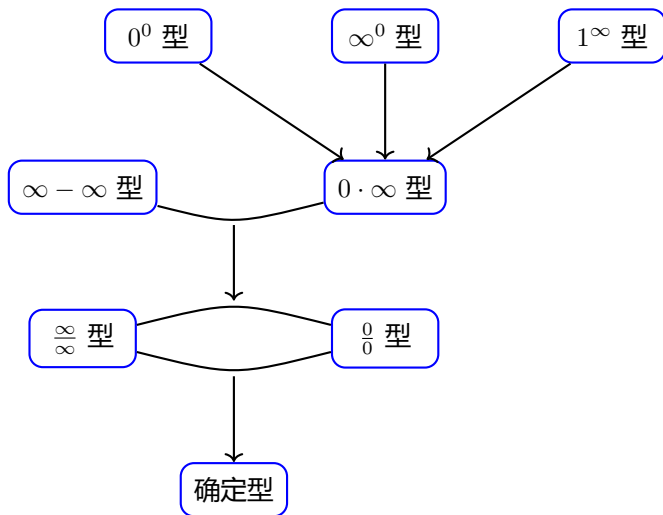


9 向量代数

- 向量及其表示: 长度 + 方向
- 向量运算:
 - 线性运算: 平移、伸缩
 - 点乘: 投影、夹角
 - 叉乘: 反交换律、平行四边形面积, $a \times b \perp a$, $a \times b \perp b$
 - 混合积: 体积、共面

10 平面与直线方程

- 夹角, 距离, 平行, 垂直, 如何判定相交



$$(15) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x^2} + \cos \frac{1}{x^2} \right)^{3x^2}$$

$$(18) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^3 \ln \frac{x+1}{x-1} - 2x^2 \right)$$



计算极限

- ① (13,14,19) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n(n+1)(n+2) \cdots (2n-1)}}{n}$
- ② (17) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+1/2} + \cdots + \frac{\sin \pi}{n+1/n} \right]$
- ③ (15) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n+k}$
- ④ (16) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2 - i^2}}$
- ⑤ (12) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$
- ⑥ (16) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$



例

① (17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{1}{t} \ln(1+xt) dt}{x^2}$

② (15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_{x^2}^x \frac{\sin xt}{t} dt.$

③ (13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\tan x^2} \int_{\frac{x}{2}}^x \frac{e^{xt} - 1}{t} dt$

④ (14) 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} t \arctan(at) dt}{x^6} = 2$, 则 a .



例

求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$.

定理

若 $x \rightarrow \square$ 时, $a(x) \rightarrow 0$, $b(x) \rightarrow \infty$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow \square} (1 + a(x))^{b(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \square} a(x)b(x)}$$

例

求幂指函数 $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$ 的导数.



定理

设 $y = f(u)$, $u = g(x)$, 则有

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

例

已知 $f(u)$ 可导, 求 $f(\ln x)$ 的导数和二阶导数.

定理

设参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定了 x 和 y 的函数关系, 则有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)} \quad (2)$$



一般地, 对于函数在闭区间 $[a, b]$ 上的最值, 我们只需考虑下述这些可疑点:

- 导数为零的点;
- 导数不存在的点;
- 区间的端点。

特殊地, 若函数在区间 (开或闭, 有限或无限) 上可导, 且在区间内只有一个驻点, 则有

- 如果该驻点为极大值, 则它也是最大值;
- 如果该驻点为极小值, 则它也是最小值。



例

证明：当 $x > 0$ 时，有 $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$.

证明不等式有如下这些方法：

- ① 拉格朗日中值定理
- ② 泰勒公式
- ③ 函数的单调性
- ④ 曲线的凹凸性

利用 1 阶导数

利用 n 阶导数

利用 1 阶导数

利用 2 阶导数



例

13 期末

设 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上连续单调增函数, 求证: $\int_a^b xf(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$.

例

18 期末

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 并且 $f(x) \geq 0$, 满足

$$f^2(x) \leq 1 + 2 \int_0^x f(t) dt, \quad x \in [0, 1].$$

证明: $f(x) \leq 1 + x, x \in [0, 1]$.



• 泰勒公式和几个常用函数的麦克劳林展开

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \xi \text{ 介于 } x \text{ 与 } a \text{ 之间};$$

$$\textcircled{1} e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\textcircled{3} \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + o(x^n)$$

$$\textcircled{4} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1} + o(x^{2k})$$

$$\textcircled{5} \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2k+1})$$

掌握函数在一点的泰勒公式，会用直接展开或间接展开的方法求函数的泰勒公式。

$$\left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \right)$$

例

18 期末

如果 $f(0) = 0$, 证明: 在 $[-a, a]$ 上至少存在一点 ξ 使 $a^3 f''(\xi) = 3 \int_{-a}^a f(x) dx$.



例

17 期末

讨论函数 $y = \frac{x}{(x-1)^2}$ 的定义域, 单调增减区间, 极值, 凹凸区间, 拐点, 渐近线, 并作出函数的图像。

- ① 分析函数一般性质: 定义域、值域、奇偶性、周期性、与坐标轴的交点
- ② 画出渐近线: 水平、铅直和斜渐近线
- ③ 求一、二阶导函数: 确定不可导点
- ④ 列表分析: 单调、凸凹区间, 极值点和拐点
- ⑤ 描点作图



将有理分式分解为部分分式的时候，可以用待定系数法。

对于较简单的情形，可以直接凑出分子的系数

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(x^6+4)} &= \int \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} - \frac{x^5}{x^6+4} \right) dx \\ \int \frac{dx}{16-x^4} &= \int \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4-x^2} + \frac{1}{4+x^2} \right) dx\end{aligned}$$

有理分式也可以用换元积分法化为简单的有理分式

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 dx}{a^6 - x^6} &= \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3)}{a^6 - x^6} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{a^6 - u^2} \\ \int \frac{x^3 dx}{(1+x^8)^2} &= \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4)}{(1+x^8)^2} = \frac{1}{4} \int \frac{du}{(1+u^2)^2}\end{aligned}$$



例

① (17) $\int \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx$

② (16) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{1+x} + e^{3-x}}$

③ (13) $\int_0^{+\infty} \frac{1-x}{1+x^3} dx$

④ (19) $\int_0^{+\infty} \frac{1-x^2}{1+x^4} dx$



① 形如 $\int \sin^m x \cos^n x dx$ 的积分,

- 如果 m, n 中有奇数, 取奇次幂的底数 (如 n 是奇数, 则取 $\cos x$) 与 dx 凑微分, 那么被积函数一定能够变形为关于另一个底数的多项式函数。
- 如果 m, n 均为偶数, 则利用倍角公式降幂, 直至将三角函数降为一次幂, 再逐项积分。

② 两个类型题:

- $\int \frac{A \sin x + B \cos x}{C \sin x + D \cos x} dx$

$$\text{令 } A \sin x + B \cos x = a(C \sin x + D \cos x) + b(C \sin x + D \cos x)'$$

- $\int \frac{1}{a \sin^2 x + b \cos^2 x} dx = \int \frac{\sec^2 x}{a \tan^2 x + b} dx = \int \frac{d(\tan x)}{a \tan^2 x + b}$



换元积分法的正切正割函数情形 (令 $u = \tan x$):

$$\int \varphi(\tan x) \sec^{2k} x \, dx = \int \varphi(u) (1 + u^2)^{k-1} \, du$$

$$\int \tan^4 x \, dx = \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int \tan^2 x \, dx$$



换元积分法的正弦余弦函数情形 (k 可为负整数):

$$\int \varphi(\sin x) \cos^{2k+1} x dx = \int \varphi(u)(1-u^2)^k du$$

$$\int \varphi(\cos x) \sin^{2k+1} x dx = - \int \varphi(u)(1-u^2)^k du$$

$$\int \frac{\cos x dx}{\sin x(1+\sin x)} = \int \frac{du}{u(1+u)}$$

$$\int \frac{dx}{(2+\cos x) \sin x} = - \int \frac{du}{(2+u)(1-u^2)}$$



换元积分法的根号情形 I:

- ① 若含有 $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$, 令 $u = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$;
- ② 若含有 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt[3]{x}$, 令 $u = \sqrt[6]{x}$.

$$\begin{aligned}\int \arctan \sqrt{x} dx &= \int 2u \arctan u du \\ \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} dx &= 6 \int \frac{1}{u^2 + u} du \\ \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4 \sin^2 u \cos^2 u du = \frac{a^4}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16} a^4\end{aligned}\tag{17}$$



分部积分公式: $\int \mathbf{u} d\mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v} - \int \mathbf{v} d\mathbf{u}$

分部积分的关键在于选择合适的 $\mathbf{u}$ 和 $d\mathbf{v}$:

- $\int x e^x dx = \int \mathbf{x} d(\mathbf{e}^x)$
- $\int x \cos x dx = \int \mathbf{x} d(\sin x)$
- $\int x \ln x dx = \int \ln \mathbf{x} d(\frac{1}{2}x^2)$
- $\int x \arctan x dx = \int \arctan \mathbf{x} d(\frac{1}{2}x^2)$



例

① (17) $\int \cos(\ln x) dx$

② (19) $\int (\arcsin x)^2 dx$

③ (16) $\int_0^{\pi} x \cos^6 x \sin x dx$

④ (15) $\int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$

⑤ (18) $\int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$

⑥ (15) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

⑦ (19) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx$

⑧ (14) 设 $f(x) = \int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt$, 求 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$.



① 定积分的性质

- 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.
- 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

$$(18) \int_{-1}^1 \frac{x^5 + x^3 + x^2 + x + \sin x}{1 + x^2} dx$$

$$(06) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} dx$$

- 若 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 则 $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$.
- 若 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的连续函数, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx, \quad \int_0^{\pi} f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx.$$

$$(\text{计算 } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx = \frac{8}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\pi.)$$

- 要注意被积函数中的 $|\cdot|$, $\sqrt{\cdot}$ 在积分区间上的符号。

$$(\text{计算 } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx.)$$



② 记 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$. 分部积分可得递推公式 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$
从而

$$I_k = \begin{cases} \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdots \frac{2}{3} I_1 = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}, & k = 2n-1, \\ \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} I_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & k = 2n. \end{cases}$$

例

- ① (13) 求连续函数 $f(x)$, 使得 $f(x) = x \arctan x + \frac{1}{1+x^2} \int_0^1 f(x) dx$.
- ② (18) 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$ 设 $F(x) = \int_1^x f(t) dt (0 \leq x \leq 2)$, 求 $F(x)$.
- ③ (19) 设 $f(x)$ 连续, $g(x) = \int_0^1 f(xt) dt$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ (A 为常数), 求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。



在极坐标中, 由射线 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ 以及曲线 $\rho = \rho(\theta)$ 围成的曲边扇形的面积为

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} \rho^2(\theta) d\theta$$

例

- ① 求曲线 $\rho = 2 \cos \theta$ 围成的面积。
- ② (13) 求曲线 $\rho = \sqrt{\sin \theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) 所围图形的面积。

例

18 期末

求曲线 $y = \ln x$ 的一条切线, 使得这条切线与原曲线, 以及直线 $x = 1, x = e^2$ 所围成的图形面积最小。



- ① 参数方程: $s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$
- ② 直角坐标: $s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$
- ③ 极坐标: $s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} d\theta$

例

15,19 期末

求心脏线 $\rho = a(1 + \cos \theta)$ 的全长。

例

设旋轮线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi, a > 0$) 与 x 轴围成一平面图形, 求

- 该图形的面积;
- 该图形边界的弧长;
- 该图形绕 x 轴旋转一周的旋转体的体积;
- 该图形绕 y 轴旋转一周的旋转体的体积。

1. $3\pi a^2$, 2. $8a + 2\pi a$, 3. $5\pi^2 a^3$, 4. $6\pi^3 a^3$



平面, 直线方程

17 期末

设直线 $L: \begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0 \\ x + y + 4z - 2 = 0 \end{cases}$, 平面 π 的方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, a, b, c 均为非零的数, 且 $b = c$, 平面 π 过直线 L , 求平面 π 的方程。

位置关系

19 期末

- ① 求一条直线 L 过点 $P(2, 3, 4)$, 且与平面 $\pi: 2x + y - 2z + 7 = 0$ 平行, 又与直线 $L_1: \frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-5}{-1}$ 相交。
- ② 证明 $L_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$, $L_2: \frac{x+2}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$ 是两条异面直线。

夹角, 距离

17 期末

求点 $P(1, 2, 3)$ 到直线 $L: \begin{cases} x - y + z + 5 = 0 \\ 5x - 8y + 4z + 36 = 0 \end{cases}$ 的距离。

例

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可微, 且满足条件 $f(1) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} xf(x) dx$, 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$.

例

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续可微, $f(0) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in [0, 1]$, 使得

$$f'(\xi) = 2 \int_0^1 f(x) dx.$$

例

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶连续可微, $f(a) = f(b) = 0$. 证明:

- ① $\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \frac{1}{8}(b-a)^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$
- ② $\max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| \leq \frac{1}{2}(b-a) \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$

例

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续可微, 且 $\int_a^b f(x) dx = 0$, $\max_{x \in [a, b]} |f'(x)| = M$. 证明:

$$\left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq \frac{M}{8}(b-a)^2, \quad \forall x \in [a, b].$$

例

13 期末

设 $f(x)$ 是二阶可微函数, 且 $f''(x) \geq 0$, 证明:

1. 对任意的 $x, p \in \mathbb{R}$, 有 $f(x) \geq f(p) + f'(p)(x - p)$;
2. $\exp\left(\int_0^1 (1 + f^2(x)) \, dx\right) \leq \int_0^1 \exp(1 + f^2(x)) \, dx$.

例

15 期末

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 并且存在 $M > 0$, 使得 $|f'(x)| \leq M$. 设 n 为正整数, 证明:

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(k/n)}{n} - \int_0^1 f(x) \, dx \right| \leq \frac{M}{2n}.$$



例

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶连续可微,

- ① 证明: 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得
$$\int_a^b f(x) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{1}{24}f''(\xi)(b-a)^3.$$
- ② (Hadamard) 若 $f'' \geq 0$, 证明:
$$\frac{f(a)+f(b)}{2} \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

例

23 考研

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶导数, $f'(0) = f'(1)$, $|f''(x)| \leq 1$,

- ① 证明: 当 $x \in (0, 1)$ 时, $|f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x| \leq \frac{x(1-x)}{2}.$
- ② 证明: $\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0)+f(1)}{2} \right| \leq \frac{1}{12}. \quad (\text{可改进为 } \frac{1}{24})$



例

$$\textcircled{1} \int \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} dx. \quad \left(\frac{1}{2} \sqrt{1-4x^2} - \arctan \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} + C \right)$$

$$\textcircled{2} \int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}. \quad \left(\arctan \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) + C \right)$$

$$\textcircled{3} \int \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx. \quad \left(x \tan \frac{x}{2} + C \right)$$

$$\textcircled{4} \int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x} dx. \quad \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \ln |1+\sin x| + C \right)$$

$$\textcircled{5} \int \frac{\arccos x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx. \quad \left(\frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2} \ln(1-x^2) + C \right)$$

$$\textcircled{6} \int \frac{dx}{\sin 2x+2 \sin x}. \quad \left(\frac{1}{8} \tan^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C \right)$$

$$\textcircled{7} \int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}. \quad \left(\frac{1}{3 \cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} - \ln |\csc x + \cot x| + C \right)$$

$$\textcircled{8} \int \frac{\ln x}{(1-x)^2} dx. \quad \left(\frac{\ln x}{1-x} + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C \right)$$

积分运算的结果是否正确，可以通过它的逆运算 (求导) 来检验，即它的导函数是否等于被积函数。



例

$$\textcircled{1} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}. \quad (2\sqrt{2}\pi)$$

$$\textcircled{2} \int_0^{+\infty} x^{2013} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx. \quad (2012!!)$$

$$\textcircled{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)\cos x}{1+\sin^2 x} dx. \quad \left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\textcircled{4} \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx. \quad (0)$$

$$\textcircled{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n(n+1)(n+2) \cdots (2n-1)}. \quad \left(\frac{4}{e}\right)$$

$$\textcircled{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx. \quad (0)$$



关于洛必达法则，有如下说明：

- 如果能用等价无穷小代换，优先使用它；
- 如果某个乘除因子的极限不为零，可以先求出该因子极限。

例

① $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \cdot (e^{-\frac{1}{6}})$

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2 \cos^2 x} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$

③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2}$. (37)

④ 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 某邻域内一阶导数连续, 且 $f(0) \neq 0$, $f'(0) \neq 0$, 若 $af(h) + bf(2h) - f(0)$ 在 $h \rightarrow 0$ 时, 是比 h 高阶的无穷小, 试确定 a, b . ($a = 2, b = -1$)